УДК 57.087

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭКПЛУАТАЦИИ ПОПУЛЯЦИИ НЕСКОЛЬКИМИ ТИПАМИ ОРУДИЙ ЛОВА (НА ПРИМЕРЕ ТРЕСКИ БЕРИНГОВА МОРЯ)

О. И. Ильин

Рассматривается задача параметрической оптимизации, связанная с определением оптимального режима эксплуатации промысловой популяции с возрастной структурой. Указывается необходимое условие оптимальности управляющих параметров. Приводится численное решение рассматриваемой задачи на примере запаса трески юго-западной части Берингова моря.

O. I. Ilyin. On the optimal exploitation of population, implying usage of several types of gears (in the example of the Bering Sea cod) // Research of water biological resources of Kamchatka and of the northwest part of Pacific Ocean: Selected Papers. Vol. 9. Petropavlovsk-Kamchatski: KamchatNIRO. 2007. P. 258–260.

One problem of the parameter optimization is discussed in the given paper. It is connected to searching of the optimal regime of exploitation of age-structured commercial population. The necessary condition of optimality of control parameters is obtained. The numerical solution of the considered problem is resulted on the example of the Pacific cod stock of the southwest part of the Bering Sea.

В практике мирового рыболовства промысел одного вида для наиболее полного его освоения нередко осуществляется несколькими типами орудий лова. Так, например, промысел трески (*Gadus macrocephalus*) в прикамчатских водах подразделяется на тралово-снюрреводный и ярусный. Вследствие этого представляет интерес определение некоторой оптимальной с экономической и (или) экологической точки зрения стратегии изъятия, при которой каждому типу орудий лова будет соответствовать определенная доля от общего улова.

Рассмотрим равновесный режим эксплуатации популяции с возрастной структурой (Динамическая теория…, 1974):

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau, x(\tau)) - u(\tau)\cdot x(\tau),$$

$$x(0) = \Phi(s); s = \int_{o}^{\tau_m} \alpha(\tau)\cdot x(\tau)d\tau, \alpha(\tau) \geq 0, \quad (1)$$

$$\tau \in [0, \tau_m].$$

Здесь τ — возраст особей, $x(\tau)$ — плотность численности (биомассы) популяции, $f(\tau, x(\tau))$ — функция, описывающая процессы роста и естественной убыли, функция $u(\tau)$ характеризует интенсивность изъятия из популяции, $\alpha(\tau) \geq 0$ — функция, характеризующая плодовитость с учетом доли половозрелых особей в зависимости от возраста, величина s представляет собой нерестовый запас популяции, функция $\Phi(s) \geq 0$, $\Phi(0)=0$ описывает процессы рождаемости. Некоторые задачи оптимальной эксплуатации популяции при равновесном режиме для случая $\Phi(s) = s$ рассматривались в работах Свирежева, Тимофеева (Свирежев, Тимофеев, 1980; Тимофеев, 1980).

Ограничимся рассмотрением случая двух типов орудий лова. Пусть доля первого типа орудия лова от общего вылова составляет ν, $0 \leq \nu \leq 1$ а на долю второго приходится $1-\nu$. Тогда функция $u = u(U, \nu, \tau)$, характеризующая интенсивность промысла, имеет вид

$$u = u(U, \nu, \tau) = U \cdot (\nu \cdot \mu_1(\tau) + (1-\nu)\cdot \mu_2(\tau)),$$

где заданные функции $\mu_i(\tau)$, $0 \geq \mu_i(\tau) \geq 1$, i=1,2 характеризуют возрастную селективность (избирательность) орудия лова, U — максимальная интенсивность изъятия. Пусть функции $c_i(\tau)$, i=1,2 выражают доход от вылова единицы биомассы рыб возраста τ первым и вторым типами орудий лова. Требуется определить такие значения параметров U, ν при которых функционал

$$F = \int_{o}^{\tau_m} U \cdot (c_1(\tau)\cdot \nu \cdot \mu_1(\tau) + \\ + c_2(\tau)\cdot(1-\nu)\cdot \mu_2(\tau))\cdot x(\tau)d\tau \to \sup, \quad (2)$$

имеющий смысл дохода от вылова рыб в возрасте от 0 до τ_m, принимает наибольшее значение. При этом должны учитываться ограничения

$$\begin{aligned} 0 \leq U \leq V \\ 0 \leq \nu \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Допустимыми значениями управляющих параметров U, ν будем считать значения, удовлетворяющие условию (3). Предположим, что функции в задаче (1) таковы, что каждой паре допустимых параметров U, ν соответствует единственное решение $x(\tau)$. Из принципа максимума Понтрягина (Понтрягин и др., 1961) для оптимальных процессов с параметрами следует, что если значения управляющих параметров U, ν — оптимальны, а $x(\tau)$ — решение уравнения (1), соответствующее этим значениям, то выполняются соотношения:

$$U\cdot\delta\nu\cdot\int\limits_{o}^{\tau_m}U\cdot\left((c_1-\psi)\cdot\mu_1-(c_2-\psi)\cdot\mu_2\right)\cdot x\,d\tau\geq 0,$$

$$\delta U\cdot\int\limits_{o}^{\tau_m}\left(\nu\cdot(c_1-\psi)\cdot\mu_1+(c_2-\psi)\cdot(1-\nu)\cdot\mu_2\right)\cdot x\,d\tau\geq 0, \tag{4}$$

при любых допустимых значениях $\delta\nu$, δU, где функция ψ есть решение сопряженного дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi}{d\tau}=(-\frac{df}{dx}+u(U,\nu,\tau))\cdot\psi-\alpha\cdot\lambda-U\cdot\left(c_1(\tau)\cdot\nu\cdot\mu_1(\tau)+\right.$$
$$\left.+c_2(\tau)\cdot(1-\nu)\cdot\mu_2(\tau)\right)\cdot x(\tau),$$
$$\psi(\tau_m)=0,\ \lambda=\psi(0)\cdot\frac{d\Phi}{d\hat{s}},\ \hat{s}=\int\limits_{o}^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot x(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Соотношения (4) могут быть использованы для построения численных методов (Федоренко, 1978) решения задачи (1) – (2) – (3).

Пусть $f(\tau,x(\tau))=r(\tau)\cdot x(\tau)-m(\tau)\cdot x(\tau)$, где $r(\tau)$, $m(\tau)$ — функции, описывающие процессы роста и смертности от естественных причин соответственно. Рассмотрим случай $\Phi(s)=a\cdot s\cdot\exp(-b\cdot s)$, соответствующий зависимости Рикера (Рикер, 1979) «запас – пополнение». Уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dx}{d\tau}=r(\tau)\cdot x(\tau)-m(\tau)\cdot x(\tau)-u(U,\nu,\tau)\cdot x(\tau),$$
$$x(0)=\Phi(s)=a\cdot s\cdot\exp(-b\cdot s),\ \ s=\int\limits_{o}^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot x(\tau)d\tau, \tag{6}$$
$$\tau\in[0,\tau_m].$$

Подставляя общее решение последнего уравнения

$$x(\tau)=x(0)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)$$

в начальное условие, находим:

$$x(0)=a\cdot x(0)\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau\times$$
$$\times\exp\left(-b\cdot x(0)\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau\right).$$

Из последнего соотношения получим, что

$$x(0)=\frac{\ln\left[a\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau\right]}{b\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau},$$

и решение уравнения (6) принимает вид:

$$x(\tau)=\frac{\ln\left[a\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau\right]}{b\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau}\times$$
$$\times\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta).$$

Разумеется, это решение имеет биологический смысл, только если $x(0)\geq 0$. Таким образом, задача максимизации функционала (2) сводится к задаче поиска максимума функции двух переменных:

$$F=F(U,\nu)=F=\int\limits_{o}^{\tau_m}U\cdot\left(c_1(\tau)\cdot\nu\cdot\mu_1(\tau)+c_2(\tau)\cdot(1-\nu)\cdot\mu_2(\tau)\right)\times$$
$$\times\frac{\ln\left[a\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)d\tau\right]}{b\cdot\int\limits_0^{\tau_m}\alpha(\tau)\cdot\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)\,d\tau}\times$$
$$\times\exp(\int\limits_0^{\tau}(r(\theta)-u(U,\nu,\theta)-m(\theta))d\theta)\,d\tau\to\sup.$$

при ограничениях (3). Задача может быть решена численно методом проекции градиента (Федоренко, 1978).

Рассмотрим задачу об оптимальном равновесном режиме эксплуатации трески юго-западной части Берингова моря. Возрастная структура описывается уравнением (6) со следующими коэффициентами:

$$\Phi(s)=a\cdot s\cdot\exp(-b\cdot s),$$
$$a=18.5\ \text{тонна}^{-1}\cdot\text{год}^{-1},$$
$$b=1.56\cdot10^{-5}\ \text{тонна}^{-1}\cdot\text{год}^{-1};$$
$$\alpha(\tau)=\begin{cases}1.026\cdot(1\text{-}\exp(\text{-}0.6433\cdot\tau))^{10.288},\\ 1,\ \tau\geq 9.319\end{cases}$$
$$\tau<9.319;$$
$$m(\tau)=\begin{cases}0.16\cdot\tau^2-1.07\cdot\tau+2.085,\ \tau<4.14\\ 0.049\cdot\tau^2-0.513\cdot\tau+1.69,\ \tau\geq 4.14\end{cases};$$
$$r(\tau)=\frac{1}{w(\tau)}\cdot\frac{dw(\tau)}{d\tau};$$
где:
$$w(\tau)=\begin{cases}1.601\cdot(1-\exp(-0.533\cdot(\tau+0.421)))^3,\ \tau<0.89,\\ 61.174\cdot(1-\exp(-0.061\cdot(\tau+1.761)))^3,\ \tau\geq 0.89.\end{cases}$$

Здесь: $m(\tau)$ — коэффициент естественной смертности рыб в возрасте τ, по данным В.П. Максименко, Н.П. Антонова (2002), $w(\tau)$ — масса рыб с возрастом τ, $r(\tau)$ — коэффициент прироста биомассы, $\alpha(\tau)$ — доля половозрелых рыб, вид $\Phi(s)$ определяется зависимостью Рикера (1979) пополнения от биомассы нерестового запаса популяции. Пусть функции $c_1(\tau)$ имеют вид:

$$c_1(\tau) = c_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 2 \\ 1, & \tau \geq 2 \end{cases}.$$

При таком выборе функций $c_1(\tau)$ значение целевого функционала есть биомасса выловленных рыб промыслового возраста, от 2 лет и старше. Селективность яруса $\mu_1(\tau)$ и снюрревода $\mu_2(\tau)$) имеет вид, изображенный на рисунке 1.

Численное решение задачи (6)–(2)–(3) при ограничениях $0 \leq U$, $0 \leq \nu \leq 1$ равно U=0,584 год$^{-1}$, ν=1, при этом целевой функционал достигает значения F=23994 тонн при биомассе промысловой части запаса в 94933 тонн. Плотность распределения биомассы трески юго-западной части Берингова моря $x(\tau)$ имеет вид, изображенный на рисунке 2.

Полученное решение свидетельствует о том, что максимального устойчивого улова в 23 994 тонны в перспективе можно достигнуть, если промысел проводится исключительно донным ярусом. Необходимо отметить, что при современном состоянии промысла ν=0.32 максимальное значение функционала (2) по U достигается при U=0,325 год$^{-1}$ и равно 20 499 тонн при величине биомассы промысловой части запаса в 87 197 тонн. Таким образом, результат говорит о том, что промысел трески донным ярусом более предпочтителен по сравнению со снюрреводно-траловым ловом.

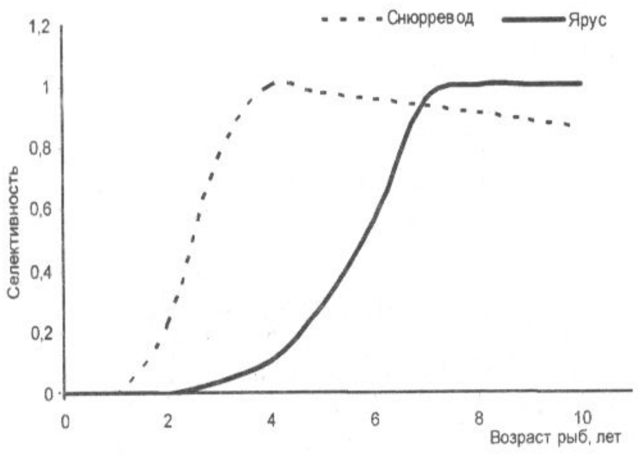

Рис. 1. Селективность снюрревода и яруса

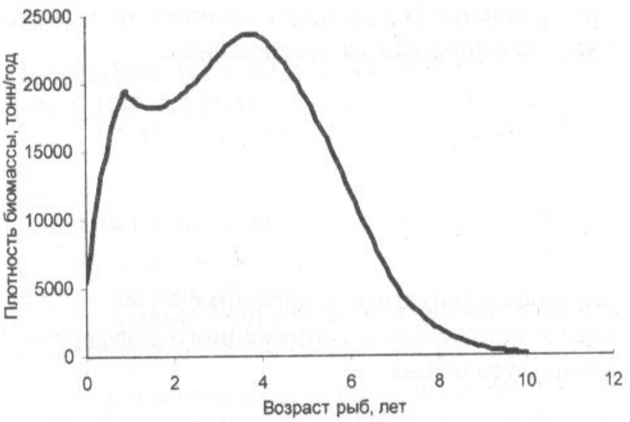

Рис. 2. Плотность распределения биомассы трески $x(\tau)$ по возрасту при оптимальном режиме промысла U=0.584, ν=1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Динамическая теория биологических популяций. 1974. (Под ред. Р.А. Полуэктова). М.: Наука, 456 с.

Максименко В.П., Антонов Н.П. 2002. Оценка естественной смертности у морских промысловых популяций рыб камчатского шельфа //Вопр. рыболовства. Т. 3 (11). С. 450–462.

Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. 1961. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 391 с.

Рикер У.Е. 1979. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. М.: Пищ. пром-сть, 408 с.

Свирежев Ю.М., Тимофеев Н.Н. О регулировании численности популяции с возрастной структурой // Журн. общ. биологии. 1980. Т. 41, № 2. С. 200–209.

Тимофеев Н.Н. Некоторые задачи оптимизации в популяциях и биологических сообществах // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1980, 23 с.

Федоренко Р.Ф. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978, 488 с.