ТОМ XXXIX | Труды Всесоюзного научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии (ВНИРО) | 1959

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОРФОМЕТРИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ САЛАКИ

Канд. техн. наук Б. Ф. НОВИЦКИЙ

Исследование морфометрических показателей промысловых рыб имеет большое значение не только для научных работ биологического направления, но и для тех работ, в которых решаются вопросы технологии и механизации рыбоперерабатывающего производства. Знание функциональных зависимостей, связывающих различные морфометрические показатели рыбы, позволяет более успешно рассчитывать процессы ее химической, термической или механической обработки и значительно облегчает условия конструирования новых специальных машин-автоматов.

Широко развернувшиеся работы по механизации и автоматизации рыбной промышленности заставляют все чаще обращаться к исследованиям морфометрических зависимостей, но имеющиеся в настоящее время данные этого рода еще далеко неполны, разбросаны в различных источниках и нередко находятся в таком состоянии, которое не позволяет непосредственно применить их для конструкторских и иных специальных расчетов.

Нами было проведено математическое исследование некоторых морфометрических показателей салаки, которые особенно необходимы при проектировании и расчетах механизированных линий посола и механизированных линий производства консервов «Шпроты в масле» из салаки. В результате исследований были установлены зависимости высоты тела, толщины тела, длины тушки и веса рыбы от ее абсолютной длины. Помимо этого, исследовались закономерности содержания рыбы в улове в зависимости от ее абсолютной длины.

Проведенное исследование базировалось в известной мере на цифровых данных, взятых из материалов технологической группы Балтийской экспедиции ВНИРО, на обширных данных, приведенных в работе Н. А. Семенова, и главным образом на данных, полученных в результате тщательных измерений 1518 экземпляров салаки на рыбоприемном пункте «Ручьи» на Южном побережье Финского залива и предоставленных автору Г. И. Бондаревым.

Н. А. Семенов, допуская существование приближенного подобия в отношении формы тела салаки различного возраста, установил следующие простые соотношения между линейными размерами, поверхностью тела и весом рыбы:

$$\frac{L^3}{W} = K_1 = 152 \pm 10;$$

$$\frac{H^3}{W} = K_2 = 0{,}669 \pm 0{,}083;$$

$$\frac{T^3}{W} = K_3 = 0{,}0834 \pm 0{,}0080,$$

где: L — абсолютная длина салаки в *см;*
H — высота тела салаки в *см;*
T — толщина тела салаки в *см;*
W — вес салаки в *г.*

Исходя из принципа геометрического подобия, Н. А. Семенов ориентировался на следующее уравнение, связывающее вес и площадь поверхности тела рыбы,

$$P = K_o W^{\frac{2}{3}},$$

где: P — поверхность рыбы в *см*²;
W — вес рыбы в *г;*
K_0 — постоянный коэффициент, характерный для данной формы.

Для коэффициента K_0 выведено значение

$$K_o = \frac{P}{W^{\frac{2}{3}}} = 7{,}88 \pm 2{,}7\%.$$

Помимо перечисленного, он дает следующие расчетные коэффициенты:

$$K_4 = \frac{L^2}{W^{\frac{2}{3}}} = 28{,}4 \pm 4{,}6\%; \qquad K_7 = \frac{L}{W^{\frac{1}{3}}} = 5{,}33 \pm 2{,}3\%;$$

$$K_5 = \frac{T^2}{W^{\frac{2}{3}}} = 0{,}190 \pm 6{,}3\%; \qquad K_8 = \frac{T}{W^{\frac{1}{3}}} = 0{,}436 \pm 3{,}2\%;$$

$$K_6 = \frac{H^2}{W^{\frac{2}{3}}} = 0{,}763 \pm 8{,}4\%; \qquad K_9 = \frac{H}{W^{\frac{1}{3}}} = 0{,}873 \pm 4{,}4\%.$$

В результате проведенных исследований Н. А. Семенов пришел к выводу о применимости методов, основанных на употреблении формул геометрического подобия, для расчетов веса, поверхности и линейных размеров салаки.

При исследовании указанных данных измерения 1518 экземпляров салаки аргументом для всех функциональных зависимостей была принята абсолютная длина рыбы.

Так как данные измерений составляли две группы, из которых одна, включавшая обмеры 1000 экземпляров, относилась к салаке летнего лова (май), а другая, включавшая обмеры 518 экземпляров,— к салаке зимнего лова (март), то каждая из групп была изучена особо. В результате этого изучения пришли к предположению, что количество рыбы данной абсолютной длины во всем количестве рыбы, составляющем группу, подчиняется закону нормального статистического распределения.

Как известно, формула нормального распределения имеет вид

$$Y = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e - \frac{(X-M)^2}{2\sigma^2},$$

где: Y — количество объектов, имеющих признак X, во всем объеме совокупности (иначе — частота появления данного значения X в совокупности);
N — объем совокупности, общее число объектов

$$N = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_K;$$

M — среднее арифметическое из всех значений признака

$$M = \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_к Y_к}{N} = \frac{\Sigma XY}{\Sigma Y};$$

σ — среднее квадратичное уклонение признака, дисперсия

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma Y (X - M)^2}{\Sigma Y}}.$$

Если ввести новый аргумент $t = \frac{X - M}{\sigma}$ — нормированное уклонение, то формула нормального распределения будет иметь вид

$$Y = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}};$$

или

$$Y = \frac{N}{\sigma} \varphi(t),$$

причем функция $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, называемая основной кривой нормального распределения, или кривой вероятности, табулирована по аргументу t.

Обозначая $X = L$ (абсолютная длина), $Y = n$ (количество рыбы данной длины в совокупности N) и исследовав на нормальное распределение данные летнего и зимнего лова, получим:

а) для летнего лова

$$N = 1000; \quad M = 141{,}707; \quad \sigma = 9{,}9075;$$

б) для зимнего лова

$$N = 518; \quad M = 127{,}686; \quad \sigma = 13{,}962$$

(L и M в *мм*).

Таким образом, для летнего лова

$$n \cong \frac{100}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(L - 141{,}707)^2}{196{,}318}}; \quad (N = 1000)$$

и для зимнего лова

$$n \cong \frac{36}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(L - 127{,}686)^2}{389{,}874}}; \quad (N = 518).$$

Сопоставление наблюдаемых частот и частот, вычисленных по этим формулам, дало вполне удовлетворительные результаты, убедительно показавшие, что именно кривая нормального распределения является той характерной кривой, по которой распределяется салака в улове в зависимости от абсолютной длины.

Заметим, что приведенные формулы для вычисления составлены только для изучавшихся совокупностей $N = 1000$ и $N = 518$. Тем не менее, полученные по ним значения легко могут быть пересчитаны на любое количество салаки, составляющее тот или иной улов, что дает результаты, достаточно приближающиеся к действительности.

Для правильного применения формул нормального распределения салаки в улове по ее абсолютной длине необходимо проводить регулярные работы по уточнению этих формул, так как они будут несколько изменяться как для разных районов лова рыбы, так и в зависимости от времени года, от применявшихся орудий лова и т. д.

Наличие формул, составленных для разных районов лова с поправками на время лова, даст необходимую математическую основу для различных научных и производственных расчетов. Примером таких расчетов может явиться хотя бы решение основной задачи, встречающейся при конструировании сортирующих, разделочных и других машин, т. е. определение числа рыб каждой заданной размерной фракции в улове.

При знании зависимости

$$n = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(L-M)^2}{2\sigma^2}}$$

для решения такой задачи не потребуется больших усилий.

Рассматривая число рыб, у которых абсолютная длина имеет значения, не превышающие значения данного L, как функцию этого L и обозначив эту функцию $n\ (L)$, мы можем величину n выразить в виде производной

$$n = \frac{dn\ (L)}{dL},$$

так как

$$n = \lim_{\Delta \to 0} \frac{n\ (L+\Delta) - n\ (L)}{\Delta}.$$

При этом условии

$$dn\ (L) = ndL;$$

$$n\ (L) = \int^{L} ndL + C.$$

Считая начальной ординатой крайнюю ординату при $L = -\infty$ и конечной при $L = L_1$, получим

$$n\ (L_1) = \int_{-\infty}^{L_1} ndL,$$

так как $C = 0$.

Подставив n из формулы распределения, найдем

$$n\ (L_1) = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{L_1} e^{-\frac{(L-M)^2}{2\sigma^2}} dL.$$

Вводя теперь аргумент $t = \frac{L-M}{\sigma}$ и учитывая, что $dL = \sigma dt$, можем написать

$$n\ (L_1) = N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Здесь предположено, что величина L_1 соответствует t_1.

$$t_1 = \frac{L_1 - M}{\sigma}.$$

Эта формула определяет число рыб из общего количества N_1, у которых признак t имеет все значения от $t=-\infty$ до $t=t_1$. Она и дает возможность решить нашу задачу.

Определим количество рыб K, содержащихся в общем числе N, у которых абсолютная длина изменяется в границах от L_1 до L_2, т. е. в тех пределах, которые характеризуют интересующую нас размерную фракцию.

Заданным величинам L_1 и L_2 соответствуют значения t_1 и t_2; можно написать, что

$$K = n(L_2) - n(L_1) = N\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - N\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Таким образом

$$K = N\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Графическое исследование показало, что зависимость длины тушки от абсолютной длины салаки можно представить в виде прямой линии. Поэтому она была найдена исходя из формулы линейного интерполирования по способу наименьших квадратов

$$(l - l_0) = r\frac{\sigma(l)}{\sigma(L)}(L - L_0),$$

где: l — длина тушки в *мм;*
l_0 — среднее значение длины тушки;
r — коэффициент корреляции;
$\sigma(l)$ — дисперсия ряда l;
L — абсолютная длина в *мм;*
L_0 — средняя абсолютная длина;
$\sigma(L)$ — дисперсия ряда L.

Величины r, $\sigma(l)$ и $\sigma(L)$ вычисляются по формулам:

$$r = \frac{\Sigma\, l_1 L_1}{\sqrt{\Sigma\, l_1^2\, \Sigma\, L_1^2}}\,; \quad \sigma(l) = \sqrt{\frac{\Sigma\, l_1^2}{n}}\,; \quad \sigma(L) = \sqrt{\frac{\Sigma\, L_1^2}{n}},$$

где: $l_1 = l - l_0$; $L_1 = L - L_0$;
n — число наблюдений.

В результате вычислений получено:

$l_0 = 83{,}286$; $L_0 = 129{,}314$; $n = 35$; $\Sigma L_1^2 = 33615{,}563$; $\Sigma l_1^2 = 14753{,}150$; $\Sigma L_1 l_1 = 22138{,}864$; $\sigma(l) = 20{,}531$; $\sigma(L) = 30{,}991$; $r = 0{,}994$.

Таким образом, зависимость длины тушки от абсолютной длины имеет вид

$$l = 0{,}658\ L - 1{,}801.$$

Обратная зависимость $L = F(l)$ находится по формуле

$$L - L_0 = r\frac{\sigma(L)}{\sigma(l)}(l - l_0).$$

После соответствующих преобразований эта формула принимает вид

$$L = 4{,}385 + 1{,}500\, l.$$

Практика показывает, что в пределах $70 \leqslant L \leqslant 200$ эти формулы дают вполне удовлетворительные результаты.

Значения толщины тела салаки, нанесенные на график в прямоугольных координатах «толщина тела — абсолютная длина», образуют обширное поле точек, совокупность которых выражает зависимость максимальной толщины тела от абсолютной длины. Здесь имеют место значительные и закономерные отклонения точек от средних значений и для определения формулы зависимости приходится применять особые приемы.

Если ограничить совокупность точек на графике двумя линиями, то получим границы, через которые толщина тела не переходит ни в сторону увеличения, ни в сторону уменьшения своих значений. Изучение показало, что эти граничные линии достаточно точно могут быть изображены в виде двух наклонных прямых. Определив их формулы, получим зависимости изменения максимальных и минимальных значений максимальной толщины тела салаки от абсолютной длины L.

Для максимальных значений

$$S_{\max} = 0{,}144\ L - 5{,}000.$$

Для минимальных значений

$$S_{\min} = 0{,}082\ L - 2{,}530,$$

где $S_{\max}$ и $S_{\min}$ — максимальное и минимальное значения максимальной толщины тела салаки в *мм*.

Изменение средних значений можно найти по формуле

$$S = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2};$$

$$S = 0{,}113\,L - 3{,}765.$$

Точно такие же операции приходится производить при определении зависимости высоты тела от абсолютной длины.

Для максимальных значений

$$t_{\max} = 0{,}275L - 4{,}600.$$

Для минимальных значений

$$t_{\min} = 0{,}162L - 0{,}094.$$

Для средних значений

$$t = 0{,}219L - 2{,}347.$$

При больших отклонениях, которые имеют здесь место, такие приближенные формулы будут вполне достаточными для технических расчетов.

Для определения зависимости веса салаки от ее линейных размеров можно исходить из следующих соображений.

Вес салаки может быть определен по формуле

$$g = \gamma V,$$

где: g — вес одной рыбы в *г;*
γ — удельный вес рыбы;
V — объем рыбы в *см*^{3}.

Впишем контуры каждой рыбы в параллелепипед со сторонами, равными максимальной толщине тела, максимальной высоте тела и абсолютной длине.

Тогда

$$g = \gamma_1 V_1,$$

где: g — вес рыбы в $г$;

V_1— объем параллелепипеда;

$\gamma_1 = k$—коэффициент, заменяющий удельный вес в предшествующей формуле.

Согласно проведенному исследованию среднее значение этого коэффициента составляет

$$k = 0{,}00049;$$

$$k = 0{,}0005.$$

Таким образом, вес салаки может быть приближенно определен по формуле

$$g = 0{,}0005\, V_1$$

или

$$g = 0{,}0005\, LSt.$$

Подставив выведенные ранее значения S и t, получим выражение веса салаки через абсолютную длину

$$g = 0{,}004L - 0{,}00054L^2 + 0{,}00001L^3 = f(L).$$

Построив график этой зависимости в прямоугольных координатах, мы убедились, что кривая, построенная по вычисленным значениям, проходит ниже кривой, построенной по опытным данным, ограничивая опытные данные наподобие нижней предельной кривой. Заметно, что характер полученной кривой очень близок к действительному расположению точек.

Подставив в формулу $g = 0{,}0005\, LSt$ значения S_{max} и t_{max}, получим зависимость $f_2(L)$.

$$g = f_2(L) = 0{,}0015L - 0{,}0010187\, L^2 + 0{,}0000198\, L^3,$$

которая дает на графике кривую, проходящую несколько выше опытных значений веса, ограничивая их сверху.

После двойного усреднения данных обеих зависимостей можно воспользоваться формулой

$$g = 0{,}003375L - 0{,}0006597L^2 + 0{,}00001245\, L^3,$$

которая дает удовлетворительные результаты, отчего и была принята для приближенных расчетов веса салаки в зависимости от ее абсолютной длины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании математического исследования некоторых морфометрических показателей салаки выведены формулы для приближенных вычислений толщины, высоты и веса салаки в зависимости от ее длины. Предложенные формулы могут быть использованы при конструировании машин-автоматов для обработки салаки.