

Том XLIX	Труды Всесоюзного научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии (ВНИРО)	1964
Том LI	Известия Тихоокеанского научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии (ТИНРО)	

551.465(265.2)

СХЕМА ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ТЕЧЕНИЙ БЕРИНГОВА МОРЯ В АВГУСТЕ 1959 и 1960 г.

З. Ф. Гурикова
Кафедра физики моря ДВГУ

и

Т. Т. Винокурова и В. В. Натаров
ТИНРО

Задачей наших исследований явилось изучение основных черт формирования общей циркуляции течений Берингова моря в целях выяснения влияния их на распределение водных масс и условия обитания водных организмов.

Общепринято утверждение, что в создании общей циркуляции Берингова моря большую роль играет приток тихоокеанских вод. Однако неясно, почему эти воды проникают в Берингово море, какова причина их движения в пределах самого моря.

В статье А. М. Баталина [2], опубликованной в настоящем сборнике, устанавливается, что в зоне пролива между Командорскими и Ближними о-вами приток тихоокеанских вод с моря определяется поперечной неравномерностью ветрового поля над самой южной окраиной, прилегающей к этому проливу. В нашей работе мы рассматривали основные черты формирования общей циркуляции течений всего моря под действием пространственной неравномерности поля ветров, представленного полем атмосферного давления. Рассмотрим сначала результаты исследований системы течений Берингова моря, проведенных до настоящего времени.

В. Доллом [25] была составлена первая предположительная схема течений Берингова моря, согласно которой циркуляция вод носит циклонический характер. В. Долл считал, что в западной части моря течение направлено из Северного Ледовитого океана на юг, а в восточной тихоокеанские воды через проливы Алеутской гряды устремлены на север. С. О. Макаров [12], обобщив наблюдения, проведенные в северной части Тихого океана, разделял мнение Долла о циклонической циркуляции вод Берингова моря. В 1911 г. Шульц [28] в результате обработки большого числа наблюдений, выполненных военными судами разных стран, предложил схему течений Берингова моря. Обработав и обобщив данные о течениях, ветрах, температурах воды и воздуха, Шульц получил сезонные карты распределения ветров и установил зависимость поверхност-

ных течений от ветрового режима. Согласно схеме Шульца течения в Беринговом море в летний период при преобладающих южных ветрах направлены с юга на север, а зимой северные ветры создают течения южного направления. Кроме того, Шульц считает, что тихоокеанские воды летом входят в Берингово море через западные и восточные проливы Алеутской гряды двумя мощными потоками.

В 1937 г. Г. Е. Ратманов [15] в результате работ экспедиций ГГИ и ТИРХ в 1932—1933 гг. получил новую более детальную схему течений Берингова моря для летнего периода, составленную на основании динамических карт и непосредственных наблюдений над течениями (рис. 1).

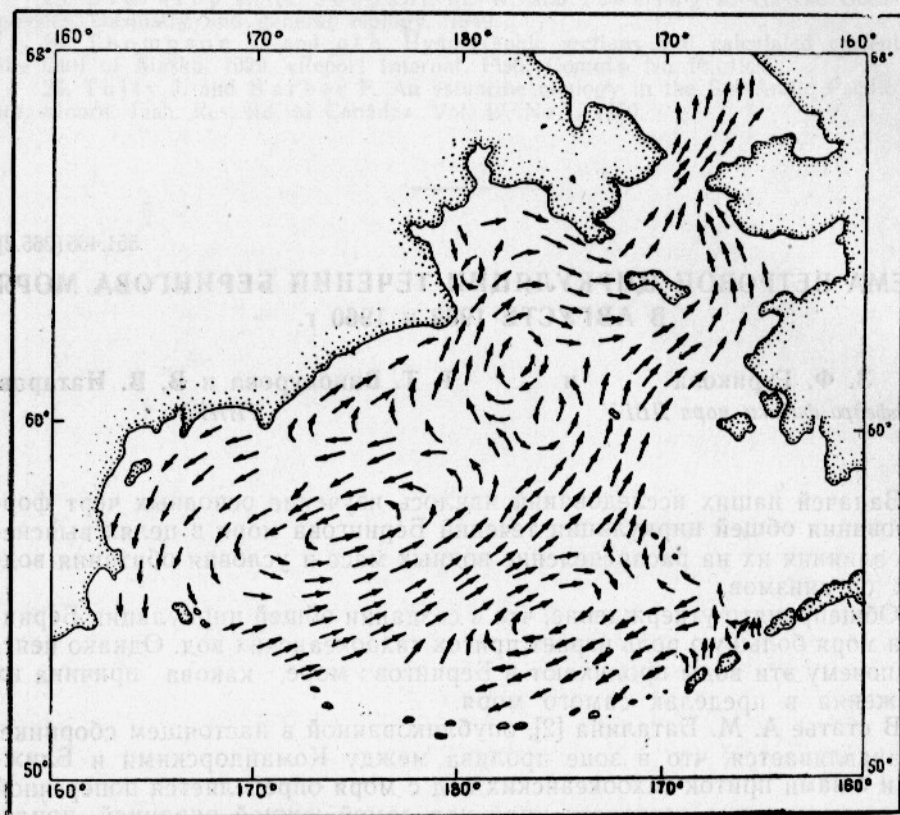


Рис. 1. Схема течений на поверхности (по П. Е. Ратманову).

Приток тихоокеанской воды в Берингово море через проливы Алеутской гряды Г. Е. Ратманов считает «одной из главных причин, определяющих во многом гидрологический режим моря, в том числе и систему течений» [15]. Наиболее четко этот приток прослеживается в проливе между Командорскими и Алеутскими о-вами и в проливах около о-ва Уналашка. Учитывая громадное значение в распределении течений таких факторов, как конфигурация берегов, сложный рельеф дна Берингова моря, отклоняющую силу вращения земли и т. д., Ратманов предложил схему течений для летнего периода, ставшую общепризнанной.

Ратманов выделил основной приток тихоокеанских вод, поступающих через пролив между Алеутскими и Командорскими о-вами, проследил его дальнейшее передвижение в Беринговом море. Этот поток, войдя в море и приблизившись к материковому склону, разделяется на две ветви, которые и образуют два больших круговорота в центральной части моря. В западной части моря вода в круговороте движется против часовой

стрелки, а в восточной — по часовой стрелке. Центр западного круговорота находится примерно на широте 57° N и долготе 175° E, а восточного — немного южнее 55° N и 176° W.

При подходе к мысу Олюторский левая ветвь основного потока вследствие выступающего берега и сложного подводного рельефа разделяется на два потока, один из которых направляется на северо-восток, а второй — на юг и юго-запад и частично через пролив между п-овом Камчатка и Командорскими о-вами выходит в Тихий океан (Камчатское течение на современных отечественных картах и Оясио — на зарубежных). Вторая ветвь, идущая на северо-восток, проходит между двумя круговоротами, расположенными в районе мыса Наварин, и направляется затем к южному берегу Чукотского п-ова, а от него через проливы между мысом Чаплина, о-вом Св. Лаврентия и материком Америки уходит через Берингов пролив в Северный Ледовитый океан.

В восточной половине моря круговорот воды поддерживается основным потоком, направленным на северо-восток, и частично проникающим в Берингово море Аляскинским течением, направленным главным образом на запад. Такова в общих чертах схема поверхностных течений Ратманова.

Кроме того, Ратманов [16] на основании непосредственных наблюдений над течениями дал характеристику режима течений в районе Берингова пролива, которая нашла подтверждение в теоретических расчетах В. Б. Штокмана [23].

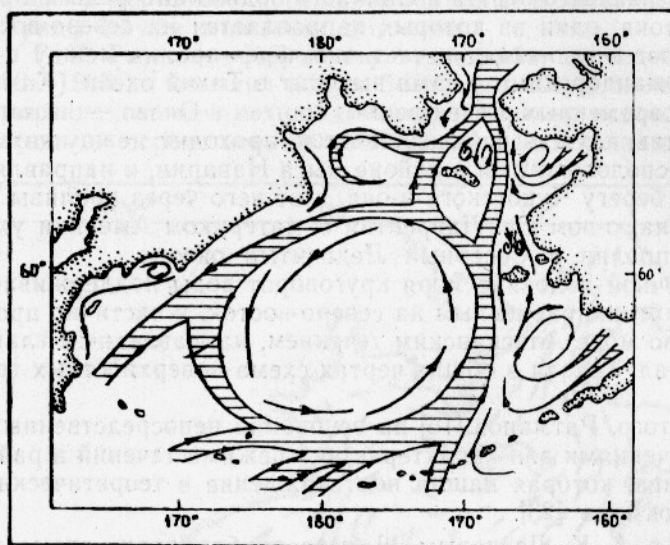
В 1947 г. А. К. Леоновым [9] была опубликована схема общей циркуляции водных масс Берингова моря для летнего и зимнего периодов, согласно которой тихоокеанские воды поступают в Берингово море в четырех местах: между Командорскими о-вами и крайним западным островом Алеутской гряды, через проливы между о-вами Симиши и Киска, в проливе западнее о-ва Танага и в проливы между о-вами Уналашка и Амля. Войдя в Берингово море, эти ветви, соединяясь вместе, образуют мощное Тихоокеанское течение, направленное вначале на восток вдоль Алеутской гряды, а затем на меридиане о-ва Павла — на север к Берингову проливу. Несколько южнее о-ва Св. Лаврентия от Тихоокеанского течения ответвляется поток, который зимой направлен к югу, а летом разделяется на две части, одна из которых также идет на юг, а вторая входит в пролив между мысом Чаплина и западной окраиной о-ва Св. Лаврентия. Течение, направленное на юг (Камчатское течение), на параллели мыса Олюторского и о-ва Карагинского отделяет от себя ветвь (течение Беринга), которая, соединяясь вскоре с Тихоокеанским течением, уходит на север. В южной части моря перемещение вод, обусловленное Тихоокеанским течением, мало изменяется в течение года (рис. 2).

В 1957 г. В. Б. Штокман [23] подверг резкой и справедливой критике работы А. К. Леонова [9, 10], указывая, что, перечисляя всевозможные факторы, определяющие горизонтальную циркуляцию вод Берингова моря, Леонов так и не объяснил причины этой циркуляции.

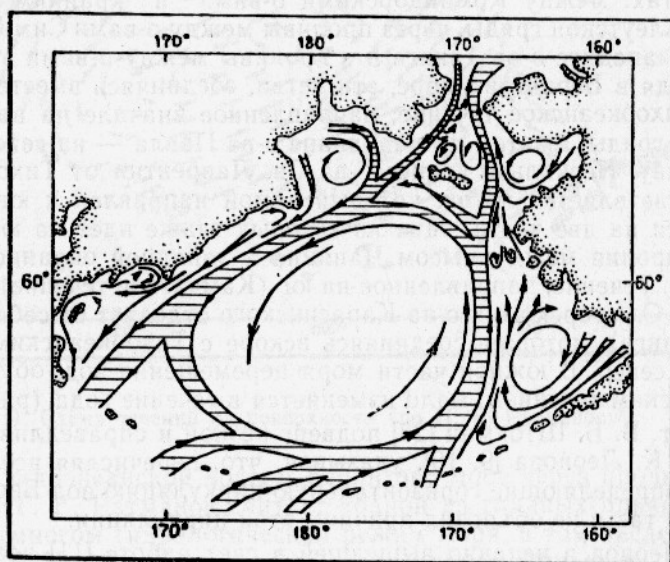
А. К. Леонов в недавно вышедшей в свет работе [11] подчеркивает, что течения Берингова моря непосредственно связаны с поступлением тихоокеанских вод через Алеутские проливы в результате водообмена Северного Ледовитого океана с северными частями Атлантического и Тихого океанов. Но Леонов, к сожалению, не объясняет причин этого водообмена.

Следует обратить внимание на интересную попытку К. Н. Федорова [19], выяснить схему полных потоков Берингова моря методом косвенного моделирования. Используя аналогию между уравнениями полных потоков и малых прогибов тонкой упругой пластины, Федоров получил распределение полных потоков для зимнего периода (февраль). Учитывая преобладающий циклонический характер распределения ба-

рического поля над Беринговым морем в течение всего года, Федоров склонен утверждать, что полученная им схема полных потоков подтверждает существование устойчивой циклонической циркуляции постоянных ветровых течений в море (рис. 3). Однако, как указывает Фе-



a



б

Рис. 2. Схема общей циркуляции водных масс Берингова моря (по А. К. Леонову):
a — летом; *б* — зимой.

доров, полученная картина полных потоков страдает некоторой схематичностью.

Таким образом, большинство авторов, перечисленных выше, считают, что главным импульсом, создающим течения в Беринговом море, является приток тихоокеанских вод. Но в самом море должны действовать при-

чины, определяющие возможность этого притока. Этой причиной могла бы быть ветровая деятельность над самим морем [19, 23].

По предложению А. М. Баталина и под его руководством авторами статьи была сделана попытка рассчитать схему полных потоков Берингова моря, исходя из предположения, что это море представляет собой замкнутый бассейн. Такое предположение может быть оправдано тем, что нас интересует пока только частная задача — создает ли неравномерное распределение вертикальной составляющей тангенциального на-

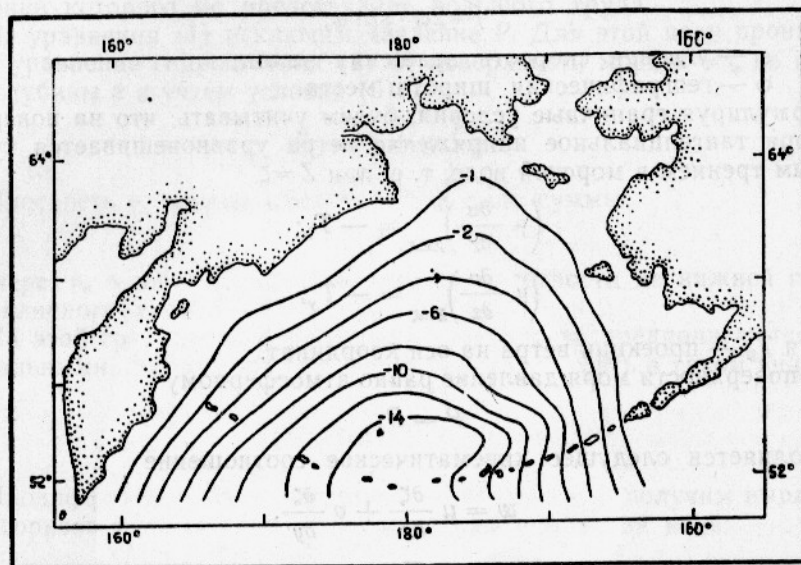


Рис. 3. Схема распределения полных потоков в Беринговом море в феврале (по К. Н. Федорову).

пряжения ветра над самым морем условия, необходимые для возникновения общей циркуляции течений в пределах Берингова моря независимо от водообмена с океаном.

При решении задачи определения установившихся морских течений глубокого бароклинного слоя моря учитывается распределение поля ветра над морем, турбулентный обмен количеством движения как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях, параметр Кориолиса и плотность морской воды. Предполагается, что ветровое течение не проникает до самого дна, а захватывает верхний бароклинный слой моря. Уравнения установившегося движения для бароклинного моря можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \mu_L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2f\rho v &= \frac{\partial P}{\partial x} \\ \mu_L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - 2f\rho u &= \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

$$g\rho = \frac{\partial P}{\partial z}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где u, v, w — составляющие скорости течения вдоль декартовых осей координат X, Y, Z ;

P — давление;

g — ускорение силы тяжести;
 ρ — плотность морской воды;
 μ_L — коэффициент горизонтального обмена количеством движения (предполагается постоянным);
 μ — коэффициент вертикального обмена количеством движения (предполагается, что не зависит от вертикальной координаты);
 f — параметр Кориолиса,

$$f = 2\omega \cdot \sin \varphi;$$

ω — угловая скорость вращения земли;

φ — географическая широта места.

Формулируя граничные условия, будем учитывать, что на поверхности моря тангенциальное напряжение ветра уравнивается турбулентным трением в морской воде, т. е. при $Z = \zeta$

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{Z=\zeta} = -T_x; \quad (4)$$

$$\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{Z=\zeta} = -T_y,$$

где T_x и T_y — проекции ветра на оси координат.

На поверхности моря давление равно атмосферному

$$P = P_a \quad (5)$$

и выполняется следующее кинематическое соотношение

$$w = u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (5')$$

В бароклинном слое толщиной H поле плотности приспособляется к полю движения, т. е., как мы указывали выше, на нижней границе бароклинного слоя скорости затухают и исчезают горизонтальные градиенты давления: при $z = H$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$w = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Формулируя граничные условия на контуре моря, предположим, что берега обрываются отвесно и что глубина моря у берегов равна толщине бароклинного слоя, т. е. создается условная вертикальной стенки, через которую могут иметь место потоки воды. Поэтому в данном случае граничные условия относятся только для полных потоков, а не для скорости течения. На береговой черте можно принять для полного потока условия прилипания или условия скольжения.

При условиях прилипания обращаются в нуль нормальная Φ_n и тангенциальная Φ_τ — составляющие полного потока Φ .

$$(\Phi_n)L = 0; \quad (9)$$

$$(\Phi_\tau)L = 0. \quad (10)$$

Принимая условия скольжения, имеем на береговой черте обращение в нуль нормальной составляющей полного потока и вертикальной составляющей вихря $\text{rot}_z \Phi$ полного потока.

$$(\Phi_n)L = 0; \quad (11)$$

$$(\text{rot}_z \Phi)L = 0. \quad (12)$$

Условия (9) и (10), (11) и (12) формулируются только для тех участков моря, где имеется берег. Если море замкнуто, то задача вполне определена; если море сообщается с океаном проливами или является заливом океана, то для решения задачи должны быть заданы величины полных потоков на жидких границах.

Интегрирование системы уравнений (1), (2) и (3) с граничными условиями (9) и (10) или (11) и (12) представляет большую сложность, поэтому большинство авторов [20—22, 24] сводят ее к одному уравнению, решение которого не представляет большого труда.

Из уравнения (1) исключим давление P . Для этой цели проинтегрируем уравнение гидростатики (2) от поверхности моря $z = \zeta$ до некоторой глубины z и учтем условие (5).

$$P = P_a + g \int_{\zeta}^z \rho dz. \quad (13)$$

Плотность ρ можно представить в виде суммы

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon,$$

где через $\rho_0 = \text{const}$ обозначено значение плотности на нижней границе бароклинного слоя $z = H = \text{const}$.

На этой границе изопикнические поверхности предполагаются горизонтальными. Выражение (13) тогда можно записать в таком виде:

$$P = P_a + g\rho_0(z - \zeta) + g \int_{\zeta}^z \varepsilon dz. \quad (14)$$

Продифференцировав выражение (14) по x и y , получим выражения для горизонтальных градиентов давления в морской воде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial P_a}{\partial x} - g\rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^z \varepsilon dz; \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial P_a}{\partial y} - g\rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta}^z \varepsilon dz. \end{aligned} \quad (15)$$

Из выражения (15) следует, что горизонтальные градиенты давления представляют сумму трех слагаемых. Первые слагаемые обусловлены неравномерностью атмосферного давления, вторые — наклонами физической поверхности моря и третьи — горизонтальной неравномерностью распределения плотности. Если представить понижение поверхности моря ζ в виде суммы статического ζ_c и динамического ζ' понижений

$$\zeta = \zeta_c + \zeta', \quad (16)$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_a}{\partial x} - g\rho_0 \frac{\partial \zeta_c}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial P_a}{\partial y} - g\rho_0 \frac{\partial \zeta_c}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

А статическое понижение уровня запишется в виде

$$\zeta_c = \frac{1}{g\rho_0} \left[P_a - \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} P_a dx dy \right], \quad (17)$$

где σ — поверхность моря.

Динамическое понижение уровня ζ' находим из равенств (15), учитывая при этом равенства (16) и (17):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -g\rho_0 \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^z \varepsilon dz, \quad (18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -g\rho_0 \frac{\partial \zeta'}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta}^z \varepsilon dz.$$

Подставляя выражение (18) в граничные условия (8), получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \zeta'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^H \varepsilon dz, \\ \rho_0 \frac{\partial \zeta'}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta}^H \varepsilon dz. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения для горизонтальных составляющих скорости течения (1) согласно равенствам (18) и (19) запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} \mu_L \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2f\rho v &= -g \frac{\partial}{\partial x} \int_{\zeta}^H \varepsilon dz; \\ \mu_L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - 2f\rho u &= -g \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta}^H \varepsilon dz. \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнения неразрывности (3) исключим вертикальную составляющую скорости течения w .

Интегрируя это уравнение по z от поверхности моря ($z=\zeta$) до нижней границы бароклинного слоя ($z=H$) и учитывая условия (51) и (7), получим уравнение неразрывности в интегральной форме

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

$$\text{div} \Phi = 0,$$

где Φ_x и Φ_y — составляющие полного потока, равные

$$\Phi_x = \int_{\zeta}^H u dz \quad (22)$$

и

$$\Phi_y = \int_{\zeta}^H v dz.$$

Учитывая равенства (21) и (22) и условия (4) и (6), проинтегрируем уравнения (20) по z от поверхности моря $z=\zeta$ до нижней границы бароклинного слоя $z=H$ и получим уравнения для составляющих полного потока

$$\begin{aligned} \mu_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2} \right) + T_x + 2f\rho \Phi_y &= g \frac{\partial Q}{\partial x}; \\ \mu_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2} \right) + T_y - 2f\rho \Phi_x &= g \frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь Q — величина, характеризующая поле плотности, осредненное по вертикали в пределах бароклинного слоя.

$$Q = \int_0^H dz \int_{\zeta}^H \rho dz. \quad (24)$$

Система уравнений (23) и (21) представляет собой замкнутую систему, так как содержит три уравнения и три неизвестных функции и является исходной для определения полных потоков в бароклинном море.

Полный поток можно представить как движение морской воды, заключенной в единичном столбе с площадью сечения, равной единице, и высотой, равной толщине бароклинного слоя. В каждый момент времени этот единичный столб могут заменить другие частицы жидкости. Применяя законы динамики к целому столбу, а не к отдельным частицам жидкости, можно перейти к рассмотрению движения центра инерции всего столба под действием внешних сил, пренебрегая внутренними силами. Метод полных потоков основан на определении горизонтального движения центра тяжести единичного столба морской воды под действием силы ветра, силы Кориолиса, ускорения силы тяжести и горизонтально-го обмена количеством движения.

Если рассматривать течение как установившееся и пренебречь нелинейными инерционными членами, сохраняется условие баланса, заключающегося в том, что сумма всех сил, действующих на единичный столб воды, равняется нулю. Это условие и соблюдается в уравнениях (23), где первые слагаемые обусловлены горизонтальным обменом количеством движения, вторые — тангенциальным напряжением ветра, третьи — параметром Кориолиса, а правые части характеризуют распределение плотности в поле земного тяготения.

Система уравнений (23) неудобна из-за членов правой части, связанных с распределением водных масс. Чтобы установить зависимость полного потока Φ от тангенциального напряжения ветра независимо от распределения плотности, характеризующей ее величиной Q , достаточно продифференцировать первое уравнение (23) по y , а второе по x и вычесть из второго первое уравнение. Направив ось Y на север и учтя равенство (21), получим

$$\mu_L \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2} \right) - \frac{df}{dy} \Phi_y + \frac{\partial T_x}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial x} = 0. \quad (25)$$

Воспользуемся векторной символикой и перепишем уравнение (25)

$$\mu_L \nabla^2 \text{rot}_z \Phi - \frac{df}{dy} \Phi_y = -\text{rot}_z T, \quad (26)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа от функции полных потоков,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (27)$$

$\text{rot}_z \Phi$ и $\text{rot}_z T$ — вихри вертикальных составляющих полного потока и тангенциального напряжения ветра.

$$\text{rot}_z \Phi = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \quad (28)$$

и

$$\text{rot}_z T = -\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}. \quad (29)$$

Введя функцию полных потоков $\psi(x, y)$, определяемую формулами

$$\Phi_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \Phi_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (30)$$

уравнение (26) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_L} \text{rot}_z \cdot T. \quad (31)$$

Сокращенно уравнение (31) можно записать так:

$$\nabla^4 \psi - \frac{df}{dy} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{1}{\mu_L} \operatorname{rot}_z T, \quad (32)$$

где

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (33)$$

— бигармонический оператор Лапласа.

Пренебрегая в уравнении (32) вторым слагаемым, обусловленным широтным изменением параметра Кориолиса ввиду небольших размеров Берингова моря по сравнению с океаном, можно записать

$$\nabla^4 \psi = - \frac{1}{\mu_L} \cdot \operatorname{rot}_z T. \quad (34)$$

Таким образом, функция полных потоков для ограниченного моря пропорциональна вертикальной составляющей вихря тангенциального напряжения ветра.

Граничные условия прилипания для функции полных потоков запишутся в таком виде:

$$(\psi)_L = 0; \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_L = 0. \quad (36)$$

Условия скольжения для замкнутого моря примут вид

$$(\psi)_L = 0; \quad (37)$$

$$(\nabla^2 \psi)_L = 0. \quad (38)$$

Зная распределение ветра над акваторией моря, можно решать уравнение (34) с граничными условиями (35) и (36) либо (37) и (38).

Ветер обычно дается по весьма грубой шкале Бофорта, в открытом море наблюдений над ветром очень мало, поэтому осреднение его приводит к большим исключениям.

Следуя А. С. Саркисяну [17], К. Хидака [26] и А. И. Фельзенбауму [20], правую часть уравнения (34) можно представить как некоторую функцию атмосферного давления. По схеме стационарной циркуляции атмосферы Н. Е. Кочина [8] уравнения установившегося движения атмосферы запишутся следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f' v_1 = \frac{\partial P_a}{\partial x}; \quad (39)$$

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f' u_1 = \frac{\partial P_a}{\partial y},$$

где u_1, v_1 — компоненты скорости ветра;

P_a — атмосферное давление;

A — коэффициент вертикального обмена в атмосфере (предполагается, что A не меняется с высотой);

f' — параметр Кориолиса, умноженный на плотность воздуха ρ_a

$$f' = 2\omega \cdot \sin \varphi \cdot \rho_a. \quad (40)$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что градиент давления в атмосфере не меняется с высотой, уравнения (39) запишутся в таком виде:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f' v_1 = f' v_g; \quad (41)$$

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f' u_1 = -f' u_g,$$

где v_g и u_g — компоненты скорости геострофического ветра

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{f'} \cdot \frac{\partial P_a}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{1}{f'} \cdot \frac{\partial P_a}{\partial x}. \end{aligned} \quad (42)$$

Умножая второе уравнение (41) на $i = \sqrt{-1}$ и складывая с первым, получим уравнения движения в комплексной форме.

$$-\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + w_1 = w_g, \quad (43)$$

где

$$w_1 = u + iv, \quad (44)$$

$$w_g = u_g + iv_g$$

и

$$a^2 = \frac{f' \cdot i}{A}. \quad (45)$$

Граничные условия у земной поверхности, где имеет место прилипание воздуха, запишутся так:

$$(w_1)_{z=0} = 0. \quad (46)$$

Граничные условия на больших высотах, где ветер является геострофическим, примут вид

$$(w_1)_{z \rightarrow \infty} = w_g. \quad (47)$$

Решение уравнения (43), удовлетворяющие граничным условиям (46) и (47), запишется в виде

$$w_1 = w_g (1 - e^{-az}). \quad (48)$$

Учитывая комплексное выражение для тангенциального давления ветра

$$T = A \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad (49)$$

получим из выражения (48) уравнение вида

$$T = aAw_g. \quad (50)$$

Отделяя действительную и мнимую часть в уравнении (50), получим выражение для компонента тангенциального давления ветра T_x и T_y

$$T_x = -\sqrt{\frac{A}{2f'}} \left(\frac{\partial P_a}{\partial x} + \frac{\partial P_a}{\partial y} \right); \quad (51)$$

$$T_y = \sqrt{\frac{A}{2f'}} \left(\frac{\partial P_a}{\partial x} - \frac{\partial P_a}{\partial y} \right).$$

Завихренность тангенциального давления ветра, как уже указывалось выше, связана с T_x и T_y формулой (29), а именно:

$$\text{rot}_z T = \frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}. \quad (51')$$

Подставляя выражения $\text{rot}_z T$ из (51') в уравнение (51), получим зависимость между завихренностью тангенциального давления ветра и изменением атмосферного давления

$$\text{rot}_z T = k \nabla^2 P_a, \quad (52)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{A}{2f'}}. \quad (53)$$

а

$$\nabla^2 P_a = \frac{\partial^2 P_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_a}{\partial y^2}. \quad (54)$$

Из выражений (53) и (51') следует, что $\text{rot}_z T$ пропорционален вертикальной составляющей вихря скорости геострофического ветра.

Эта пропорциональность может быть установлена и из физических соображений. Как уже указывалось выше, ветер вдали от земной поверхности является геострофическим, но, приближаясь к земле, под влиянием подстилающей поверхности и силы Кориолиса меняет свое направление. Ввиду того, что система горизонтальных осей координат не вращается, компоненты скорости ветра по вертикали не изменяются пропорционально друг другу. В метеорологии принято считать, что угол поворота не зависит от скорости, поэтому по мере приближения к земной поверхности углы не меняются. Следовательно, вихрь скорости ветра на любой высоте можно получить как результат умножения вихря скорости

геострофического ветра на некоторую функцию высоты. Вихрь тангенциального напряжения ветра получается умножением коэффициента турбулентного обмена количеством движения у земной поверхности на производную по вертикали от вихря скорости ветра у земной поверхности. Отсюда следует, что вихрь тангенциального напряжения ветра у поверхности земли пропорционален вихрю скорости геострофического ветра при любом изменении коэффициента обмена в атмосфере с высотой. Подставив выражение вихря вертикальной составляющей тангенциального напряжения ветра (52) в уравнение для функции полных потоков (34), получим зависимость распределения функции от распределения атмосферного давления над акваторией моря.

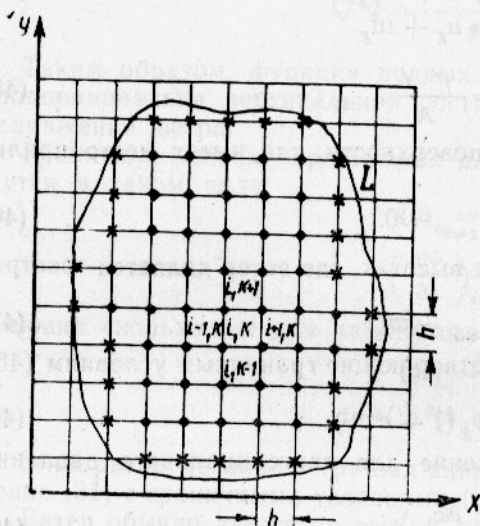


Рис. 4. Сеточная область для приближенного решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей.

$$\nabla^4 \psi = - \frac{1}{\mu_L} \cdot k \nabla^2 P_a. \quad (55)$$

Таким образом, определение функции полных потоков ψ сводится к интегрированию неоднородного бигармонического уравнения (55) при определенных граничных условиях на контуре моря (35), (36) или (37), (38). Решение такого уравнения может быть получено двумя методами: аналитическим, когда контур береговой черты может быть задан аналитическим выражением, и приближенным, если контур моря имеет произвольную форму, что мы и имеем в действительности.

При определении установившихся течений в реальных условиях могут быть использованы численные методы решения. Наиболее распространенным методом численного решения задач математической физики является метод сеток или метод конечных разностей, в основе которого заключена замена дифференциального уравнения разностными. Для отыскания приближенного численного решения дифференциальных уравнений строится сеточная область, которая может быть составлена из квадратов, треугольников, прямоугольников и т. д. Наибольшее распространение получила квадратная сетка, строящаяся пересечением двух взаимно перпендикулярных прямых, отстоящих друг от друга на расстоянии h , называемым шагом разности (рис. 4).

Точки пересечения этих прямых (узлы) могут быть внутренними и граничными. Совокупность граничных узлов составляет границу сеточной области. Сетку выбирают так, чтобы она наилучшим образом аппроксимировала контур (L) рассматриваемого моря. Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются линейными комбинациями значений функций в узлах сетки. Например, для каждого внутреннего узла сетки (i, k) можно заменить производные разностными отношениями

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{i,k} \approx \frac{\psi_{i+1,k} - \psi_{i-1,k}}{2h}; \quad (56)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{i,k} \approx \frac{\psi_{i,k+1} - \psi_{i,k-1}}{2h}; \quad (57)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{i,k} \approx \frac{\psi_{i+1,k} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i-1,k}}{h^2}, \quad (58)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_{i,k} \approx \frac{\psi_{i,k+1} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1}}{h^2}. \quad (59)$$

Так как контур Берингова моря нельзя задать аналитическим выражением, то определение функции полных потоков из уравнения (55) нами производилось численным методом. Численное интегрирование этого уравнения может быть проведено на быстродействующих электронных машинах либо вручную.

Фельзенбаум [21] и Панов [14] предлагают два способа численного решения вручную. Изложим сначала один из них.

1 способ. Бигармоническое уравнение

$$\nabla^4 \psi = -\frac{1}{\mu_L} \cdot k \cdot \nabla^2 \cdot P_a \quad (60)$$

может быть сведено к системе двух уравнений Пуассона. Воспользовавшись граничными условиями скольжения (37), (38) и введя вспомогательную функцию F , уравнение (60) можно записать так:

$$\nabla^2 F = -\frac{k}{\mu_L} \nabla^2 P_a \quad (61)$$

и

$$\nabla^2 \psi = F.$$

Граничные условия (37), (38) после введения новой функции запишутся в таком виде:

$$(F)_L = 0; \quad (62)$$

$$(\psi)_L = 0. \quad (63)$$

Сначала решают первое уравнение Пуассона (61) при граничных условиях (62), затем второе при граничных условиях (63).

2 способ. Бигармоническое уравнение (60) решают непосредственно.

Прежде чем приступить к решению уравнения первым или вторым способом, остановимся на одном из приемов разностной аппроксимации. Рассмотрим разностную аппроксимацию уравнения Пуассона для квадратной сетки с шагом разности h . Предположим, что в разностном уравнении для узла O участвуют узлы, помеченные цифрами 1, 2, 3, 4 на рис. 5. Перепишем первое из уравнений (61) в развернутой форме, предварительно обозначив правую часть через $f(x, y)$.

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (64)$$

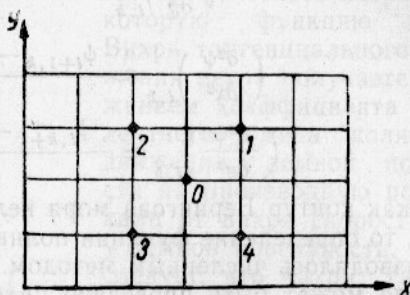
Учитывая равноправие в уравнении (64) x и y и симметричное расположение узлов (рис. 5), будем искать разностную аппроксимацию в виде

$$lF_0 = C_0 F_0 + C_1 (F_1 + F_2 + F_3 + F_4). \quad (65)$$

Предполагая у функции F наличие достаточного числа производных и разлагая F_i по формуле Тейлора в окрестности узла O , имеем

$$F_1 = F(x_0 + hy_0 + h) = F_0 + \left\{ h \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 F + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 F + \dots \right\}_0;$$

Рис. 5. Схема расположения узлов для разностной аппроксимации уравнения Пуассона.



$$F_2 = F(x_0 + h, y_0 - h) = F_0 + \left\{ h \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 F + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 F + \dots \right\}_0;$$

$$F_3 = F(x_0 - h, y_0 - h) = F_0 + \left\{ -h \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 F + \right. \\ \left. + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 F - \dots \right\}_0;$$

$$F_4 = F(x_0 - h, y_0 + h) = F_0 + \left\{ h \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \frac{h^2}{2!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F + \frac{h^3}{3!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 F + \frac{h^4}{4!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 F + \dots \right\}_0; \quad (66)$$

тогда

$$lF_0 = (C_0 + 4C_1) F_0 + 4C_1 \left\{ \frac{h^2}{2!} (F_{x^2}^{(11)} + F_{y^2}^{(11)}) + \right. \\ \left. + \frac{h^4}{4!} (F_{x^4}^{(1V)} + 6F_{x^2 y^2}^{(1V)} + F_{y^4}^{(1V)})_0 + \dots \right\}. \quad (67)$$

Для того чтобы lF_0 аппроксимировал оператор Лапласа

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

необходимо потребовать выполнения условий

$$C_0 + 4C_1 = 0; \quad 2C_1 h^2 = 1;$$

т. е.

$$C_0 = -\frac{2}{h^2}; \quad C_1 = \frac{1}{2h^2};$$

окончательно получаем

$$lF_0 = \frac{1}{2h^2} [F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 4F_0] = (\nabla^2 F)_0 + \\ + \frac{h^2}{12} (F_{x^4}^{(IV)} + 6F_{x^2y^2}^{(IV)} + F_{y^4}^{(IV)})_0 + \dots = (\nabla^2 F)_0 + R. \quad (69)$$

Если в разложении (66) ограничиться разложением по формуле Тейлора с остаточным членом в производных четвертого порядка и положить

$$M_4 = \max_L \left\{ \left| \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right|, \dots, \left| \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right| \right\},$$

то для R , будем иметь следующую оценку

$$|R| \leq 4C_1 \frac{h^4}{24} \cdot 2^4 \cdot M_4 = \frac{4h^2}{3} M_4. \quad (70)$$

Заменяя $(\nabla^2 F)_0$ на $f_0(x_0, y_0)$ и отбрасывая R , получим разностное уравнение

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 4F_0 = 2h^2 f_0, \quad (71)$$

аппроксимирующее уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = f(x, y)$$

с погрешностью аппроксимации, не превосходящей $\frac{4h^2}{3} M_4$.

Аппроксимируя дифференциальное уравнение (64) конечноразностным (71), получают систему линейных алгебраических уравнений. Число неизвестных в этой системе равно числу уравнений, которые в свою очередь определяются количеством внутренних узловых точек. Существует много различных методов решения системы линейных алгебраических уравнений, среди которых получили широкое распространение итерационные методы. Предположим, что после аппроксимации получилась линейная система уравнений:

[illegible]

Вводя в рассмотрение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

систему (67), можно записать так:

$$A_y = b. \quad (73)$$

Если предположить, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2 \dots n$), тогда, решая первое уравнение системы (72) относительно x_1 , второе относительно x_2 и т. д., получим эквивалентную систему

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n; \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n; \\ &\vdots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Если ввести матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (74) можно записать в матричной форме

$$x = \beta + \alpha x$$

и решать ее методом последовательных приближений, принимая за нулевое приближение столбец свободных членов

$$x^{(0)} = \beta.$$

Затем последовательно строим матрицы-столбцы:

первое приближение

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)};$$

второе приближение

$$x^{(2)} = 3 + \alpha x^{(1)}$$

И т. д.

Любое $(k+1)$ — е приближение вычисляют по формуле

$$x^{k+1} = \beta + \alpha x^{(k)}, \quad (75)$$

где $(k=0, 1, 2 \dots)$.

Если последовательность приближений $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ имеет предел $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, то этот предел является решением системы (74)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)},$$

$$x = \beta + ax.$$

Таким образом, предельный вектор X является решением системы (74), а следовательно, и системы (72).

Формулы приближений в развернутом виде запишутся так:

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \quad (76)$$

$$(a_{ii} = 0); \quad i = (1, 2 \dots n); \quad k = (0, 1, 2 \dots).$$

Применяя метод итерации (75), совсем не обязательно принимать за нулевое приближение x^0 столбец свободных членов (β). За нулевое приближение x^0 может быть выбрано любое произвольное число (вектор).

Целесообразно за нулевое приближение выбирать приближенные значения корней системы, полученные грубой прикидкой. Для применения процесса итерации нет необходимости делать преобразование системы (72) в систему (74). Последовательные приближения можно вычислять по формулам

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k)} &= b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}, \\ a_{22}x_2^{(k)} &= b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}, \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n^{(k)} &= b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \dots - a_{nn}x_n^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (77)$$

Сходящийся процесс итерации обладает важным свойством самоисправляемости, т. е. отдельные ошибки в вычислениях не отразятся на

окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое нулевое приближение (начальный вектор). В практике расчетов иногда удобнее подсчитывать не сами приближения, а их разности.

Если обозначим

$$\Delta^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}; \quad (k = 0, 1, 2 \dots), \quad (78)$$

то из формулы (75) имеем

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (79)$$

и

$$x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}. \quad (80)$$

Вычитая из равенства (79) равенство (80), получим

$$\Delta^{(k+1)} = \alpha (x^{(k)} - x^{(k-1)}) = \alpha \Delta^{(k)}, \quad (81)$$

т. е.

$$\Delta^{(k+1)} = \alpha \cdot \Delta^{(k)}; \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

Принимая за нулевое приближение

$$\Delta^{(0)} = x^{(0)}, \quad (82)$$

получим m -е приближение по формуле

$$x^{(m)} = \sum_{k=0}^m \Delta^{(k)}. \quad (83)$$

Если $\Delta^{(0)} = x^{(0)} = \beta$, то равенство (81) будет выполнено и при $k=0$, т. е.

$$\Delta^{(k)} = \alpha \Delta^{(k-1)} = \alpha^{(k)} \cdot \beta; \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

и

$$x^{(k)} = \sum_{s=0}^k \Delta^{(s)} = \sum_{s=0}^k \alpha^{(s)} \beta; \quad (84)$$

Если $\Delta^{(0)} = x^{(0)} \neq \beta$, то находим

$$\Delta^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \alpha x^{(0)} + \beta - x^{(0)}, \quad (85)$$

а $\Delta^{(k)}$ определится равенством вида

$$\Delta^{(k)} = \alpha \Delta^{(k-1)} = \alpha^{(k-1)} \Delta^{(1)}, \quad (86)$$

$$(k = 1, 2, 3 \dots).$$

Рассмотрим теперь непосредственную аппроксимацию уравнения (60). Используя квадратную сетку с шагом разности h , выберем узлы, указанные на рис. 6.

Перепишем уравнение (60) в развернутой форме и обозначим для краткой записи правую часть через $f(x, y)$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = f(x, y). \quad (87)$$

В силу симметрии расположения узлов и симметрии уравнения относительно X и Y можно искать разностную аппроксимацию в таком виде:

$$l\psi_0 = C_0 \psi_0 + C_1 \sum_{i=1}^4 \psi_i + C_2 \sum_{i=5}^8 \psi_i + C_3 \sum_{i=9}^{12} \psi_i. \quad (88)$$

При наличии производных шестого порядка у функции ψ разложение по формуле Тейлора дает

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi_0 + h^2 (\psi_{x^2}^{(II)} + \psi_{y^2}^{(II)})_0 + \frac{h^4}{12} (\psi_{x^4}^{(IV)} + \psi_{y^4}^{(IV)})_0 + R^{(1)},$$

где

$$|R^{(1)}| \leq \frac{4M_6 h^6}{6!};$$

$$M_6 = \max_{\sigma} \left\{ \left| \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6} \right|, \left| \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^5 \partial y} \right|, \dots, \left| \frac{\partial^6 \psi}{\partial y^6} \right| \right\};$$

$$\begin{aligned} \psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8 = 4\psi_0 + 2h^2 (\psi_{x^2}^{(11)} + \psi_{y^2}^{(11)})_0 + \frac{h^4}{6} (\psi_{x^4}^{(1V)} + \\ + 6\psi_{x^2 y^2}^{(1V)} + \psi_{y^4}^{(1V)})_0 + R^{(2)}, \end{aligned}$$

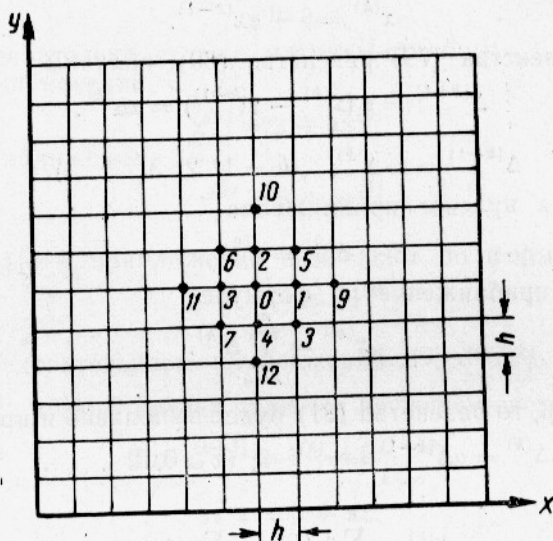


Рис. 6. Схема расположения узлов для разностной аппроксимации дисгармонического уравнения в точке «0».

где

$$|R^{(2)}| \leq \frac{4 \cdot 2^6 \cdot M_6 \cdot h^6}{6!};$$

$$\begin{aligned} \psi_9 + \psi_{10} + \psi_{11} + \psi_{12} = 4\psi_0 + 4h^2 (\psi_{x^2}^{(11)} + \psi_{y^2}^{(11)})_0 + \frac{2 \cdot 2^4 \cdot h^4}{4!} \times \\ \times (\psi_{x^4}^{(1V)} + \psi_{y^4}^{(1V)})_0 + R^{(3)}, \end{aligned}$$

где

$$|R^{(3)}| \leq \frac{4 \cdot 2^8 \cdot M_6 \cdot h^6}{6!},$$

откуда

$$\begin{aligned} l\psi_0 = (C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3) \psi_0 + h^2 (C_1 + 2C_2 + 4C_3) (\psi_{x^2}^{(11)} + \psi_{y^2}^{(11)})_0 + \\ + \frac{2h^4}{4!} (C_1 + 2C_2 + 16C_3) (\psi_{x^4}^{(1V)} + \psi_{y^4}^{(1V)})_0 + \frac{h^4}{6!} 6C_2 (\psi_{x^2 y^2}^{(1V)} + R), \quad (89) \end{aligned}$$

где

$$R = C_1 R^{(1)} + C_2 R^{(2)} + C_3 R^{(3)}.$$

Чтобы разностный оператор $h\psi_0$ аппроксимировал дифференциальный оператор $\nabla^2(\nabla^2\psi)$, нужно потребовать выполнения следующего условия:

$$\begin{aligned} C_0 + 4(C_1 + C_2 + C_3) &= 0, \quad h^4 C_2 = 2; \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 &= 0; \\ \frac{h^4}{12}(C_1 + 2C_2 + 16C_3) &= 1 \end{aligned} \quad (90)$$

откуда

$$C_0 = \frac{20}{h^4}; \quad C_1 = -\frac{8}{h^4}; \quad C_2 = \frac{2}{h^4}; \quad C_3 = \frac{1}{h^4}. \quad (90)$$

Подставляя значения коэффициентов (90) в уравнение (89), получим

$$\begin{aligned} h\psi_0 &= \frac{20\psi_0}{h^4} - \frac{8}{h^4}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) + \frac{2}{h^4}(\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8) + \\ &+ \frac{1}{4}(\psi_9 + \psi_{10} + \psi_{11} + \psi_{12}) = (\psi^{(IV)} + 2\psi_{x^2y^2}^{(IV)} + \psi_{y^4}^{(IV)})_0 + R, \end{aligned}$$

где

$$|R| = \frac{1}{h^4} |-8R^{(1)} + 2R^{(2)} + R^{(3)}| \leq \frac{10}{9} M_6 \cdot h^2.$$

Следовательно, разностное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} 20\psi_0 - 8(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) + 2(\psi_5 + \psi_6 + \psi_7 + \psi_8) + \\ + (\psi_9 + \psi_{10} + \psi_{11} + \psi_{12}) = h^4 f_0(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (91)$$

Уравнение (91) аппроксимирует дифференциальное уравнение (87) с точностью до h^2 . Такое уравнение (91) можно записать для всех внутренних узлов сетки, поэтому количество уравнений будет равно числу внутренних точек, т. е. числу неизвестных. Решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида (91).

К сожалению, Д. Ю. Панов [14] не дает рекомендации в смысле выбора методов решения такой системы. Б. А. Волюнский и В. Е. Бухман [4] указывают, что при большом числе внутренних узлов точек число уравнений становится большим и эту систему нельзя решать методом последовательных приближений, так как приближения не сходятся и формула (9) не употребляется.

В Лаборатории физики моря ДВГУ С. Золотухина под руководством З. Ф. Гуриковой попыталась численно решить бигармоническое уравнение (60) методом итерации при непосредственной его аппроксимации. Расчеты производились для района Берингова моря и прилегающей части Тихого океана при нулевых граничных условиях на твердых и жидких границах. Результаты расчетов показали, что ряд, действительно, расходится. Увеличение значений функции ψ во внутренних узловых точках происходит до шестого приближения, а затем это увеличение абсолютных величин чередуется со сменой знака (плюса на минус) и наоборот. Следовательно, при непосредственной аппроксимации бигармонического уравнения необходимо очень осторожно подходить к выбору методов решения системы алгебраических уравнений (91), так как далеко не всякий метод дает хорошую сходимость. Согласно (13) и (17) нами производилось численное интегрирование системы двух уравнений Пуассона (16) с граничными условиями (62) и (63) методом итерации, который дает хорошую сходимость для уравнений Пуассона. Разбив Берингово море на квадратную сетку с шагом разности в $2,5^\circ$ (рис. 7), мы при аппроксимации уравнений использовали расположение точек, указанных на рис. 5.

Исходными данными для расчета ветровой циркуляции в предположении, что Берингово море представляет замкнутый бассейн, послужили данные о распределении атмосферного давления в августе 1959 и 1960 г.

(рис. 8). Эти данные были получены из большой серии синоптических карт Приморского управления гидрометеорологической службы.

Вся акватория Берингова моря и прилегающие части суши были раз-

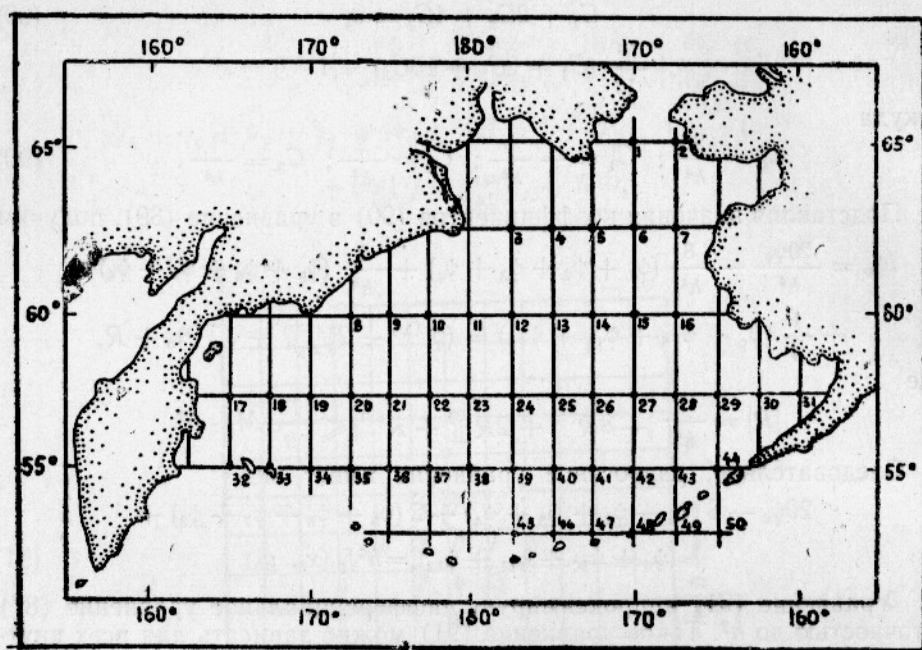


Рис. 7. Сетка квадратов Берингова моря, принятая нами для расчета функции ψ .

биты на 45-градусные квадраты. Для центра каждого из них вычислялась средняя суточная величина атмосферного давления, снятого со сроч-

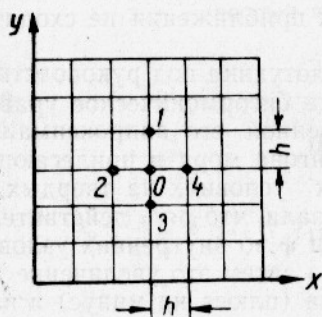


Рис. 8. Схема расположения узлов при расчете составляющих полного потока для точки 0.

ных синоптических карт, прошедших последующую обработку, а по этим данным были найдены средние месячные величины атмосферного давления. По средним месячным данным были построены далее карты распределения атмосферного давления в августе 1959 и 1960 г., т. е. в период проведения экспедиционных исследований. Можно считать, что освещенность синоптических карт, а следовательно, и надежность картин распределения атмосферного давления за это время были достаточно хорошими. Если в августе 1959 г. сложилась достаточно сложная картина распределения давления, то в августе 1960 г. над всем морем хорошо определяется область минимального атмосферного давления. Существен-

но отметить равномерность распределения над морем величин атмосферного давления. Дело в том, что по некоторым источникам, в том числе и по атласу [7], пространственное распределение наблюдений далеко неравномерно, в результате чего проведение изолиний атмосферного давления над открытой частью моря проводилось приближенно. Поэтому при использовании численных методов решения для лапласиана атмосферного давления результат получался неопределенный. Имен-

но по этой причине мы отказались от расчета полных потоков на основе данных Самойленко [7] и использовали для того упомянутые выше источники. Полученные схемы полных потоков относятся к августу 1959 и 1960 г.

Для изложения последовательности решения уравнения (60) перепишем его в системе двух уравнений Пуассона

$$\nabla^2 F = -\frac{k}{\mu_L} \nabla^2 P_a; \quad (92)$$

$$\nabla^2 \psi = F. \quad (93)$$

Граничные условия на контуре

$$(F)_L = 0; \quad (94)$$

$$(\psi)_L = 0. \quad (95)$$

Правая часть уравнения (92), включающая оператор Лапласа, от функции атмосферного давления согласно формуле (71), аппроксимируется разностным уравнением для любой из внутренних узловых точек сеточной области (см. рис. 5).

$$\Delta P_0 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4P_0}{2h^2}, \quad (96)$$

Интерполяцией были получены значения атмосферного давления (см. рис. 8) для каждого внутреннего узла сеточной области (см. рис. 7), и по формуле (96) был рассчитан лапласиан давления. Причем значения коэффициентов, входящих в правую часть уравнения (42), принимались равными

$$k = \sqrt{\frac{A}{2f'}}, \quad (97)$$

где

$$A = 10^2 \text{CGS};$$

$$f' = 2\omega \cdot \sin \varphi \cdot \rho_{\text{возд}};$$

$$\rho_{\text{возд}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{CGS};$$

$$\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} [\text{сек}^{-1}];$$

$$\mu_L = 10^8 \text{CGS}.$$

Левая часть уравнения (92), включающая искомую функцию, запишется разностными уравнениями для любого внутреннего узла выражением вида

$$F_{1i} + F_{2i} + F_{3i} + F_{4i} - 4F_{0i} = -\frac{k_i}{\mu_L} (P_{1i} + P_{2i} + P_{3i} + P_{4i} - 4F_{0i}) = -\Phi_{0i}. \quad (98)$$

Обозначив найденные значения правой части уравнения (98) через Φ_{0i} и разрешив его относительно F_{0i} , получим рабочую формулу для отыскания неизвестной функции F

$$4F_{0i} = F_{1i} + F_{2i} + F_{3i} + F_{4i} + \Phi_{0i}. \quad (99)$$

Прежде чем начать итерационный процесс (77), целесообразно заготовить вычислительные шаблоны. Заметим, что применение вычислительных шаблонов в значительной степени ускоряет и облегчает работу вычислителя. Вычислительный шаблон вычерчивается после того, как построена сеточная область. Каждая клетка шаблона соответствует определенной узловой точке сеточной области. Наружный ряд клеток

шаблона соответствует граничным узловым точкам сеточной области. Для вычислительных шаблонов может быть с успехом использована миллиметровая или специальная вычислительная бумага.

За нулевое приближение функции F_{0i} нами принималось распределение функции Φ_{0i} во всех внутренних узловых точках сеточной области (см. рис. 7) и записывалось в первый итерационный шаблон (первое приближение). Второй итерационный шаблон (второе приближение) получается из первого в результате вычислений по формуле (99) для каждого внутреннего узла. Затем из второго шаблона аналогично получаем третий шаблон и т. д.

Вычислителю необходимо помнить, что функция Φ_{0i} при всех последующих вычислениях, начиная с первого, остается постоянной. Вычисления продолжают до тех пор, пока все значения внутренних узлов двух последовательных шаблонов не совпадут в пределах заданной точности. Получив таким образом значения функции F для внутренних узлов сеточной области, приступают к вычислению функции полных потоков ψ , характеризующуюся уравнением (93). Аппроксимируя это уравнение разностными (71), получают рабочую формулу для определения функции

$$4\psi_{0i} = \psi_{1i} + \psi_{2i} + \psi_{3i} + \psi_{4i} - 2h^2 F_{0i}. \quad (100)$$

Принимая за нулевое приближение во всех внутренних узлах значение $2h^2 F_{0i}$ аналогично приведенному выше, начинают итерационный процесс. Для отыскания функции F для августа 1959 г. проведено 34 итерации, а для функции ψ — 45 итераций.

Для августа 1960 г. для функции F сделано 30 приближений, а для функции полных потоков ψ — 36 приближений. Заметим, что для облегчения расчетов в вычислениях функций F и ψ (с какого-то приближения n и $n-1$), когда значения последовательных приближений отличаются друг от друга на небольшие величины, удобнее подсчитывать не сами приближения, а их разности (см. формулы 78—86). После того как функция полных потоков определена, можно рассчитывать во всех внутренних узловых точках сеточной области значения составляющих полного потока Φ_x и Φ_y . Предположим, что вычисления составляющих полного потока ведутся в произвольной внутренней узловой точке сеточной области с индексом 0. Согласно по равенствам (30), (56) и (57) составляющие полного потока определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{1}{2h} (\psi_3 - \psi_1); \\ \Phi_y &= \frac{1}{2h} (\psi_4 - \psi_2). \end{aligned} \quad (101)$$

Модуль Φ и направление полного потока могут быть получены аналитически или по таблицам Максимова (26) для составляющих скоростей течений на меридиан и параллель. В этом случае роль составляющей по параллели будет служить составляющая полного потока в направлении оси X — Φ_x и соответственно в меридиональном направлении Φ_y .

Когда не требуется большая точность, модуль и направление полного потока могут быть определены по кругу Молчанова.

Полученные в результате вычислений значения функции полных потоков могут быть представлены в виде карты изолиний полных потоков (рис. 9).

На бланковой карте с сеточной областью (см. рис. 7) наносятся значения функции ψ для всех внутренних узловых точек, затем через определенный интервал проводятся линии равных значений.

Карта изолиний полных потоков характеризует направление и их

относительную интенсивность. Полный поток в любой точке направлен по касательной к изолинии функции ψ , причем, если смотреть в направлении вектора полного потока Φ , большие значения ψ находятся справа от него, а меньшие — слева (рис. 9).

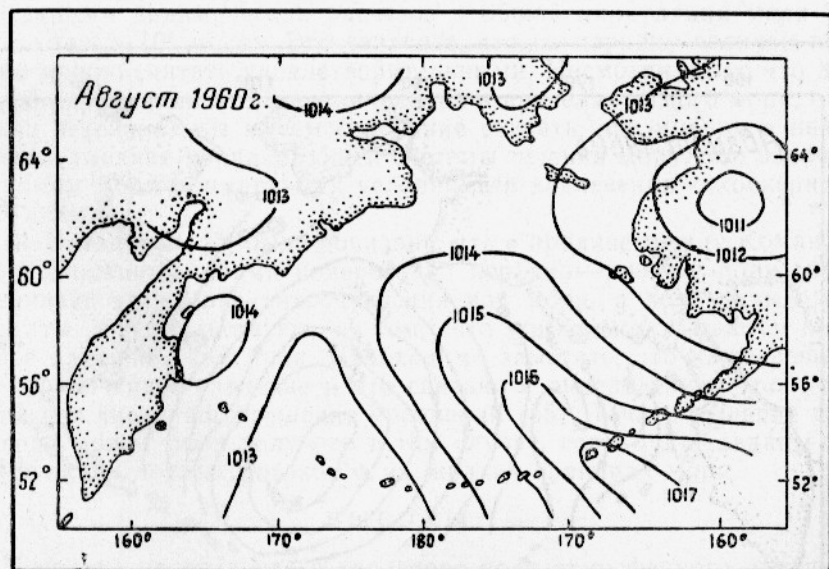
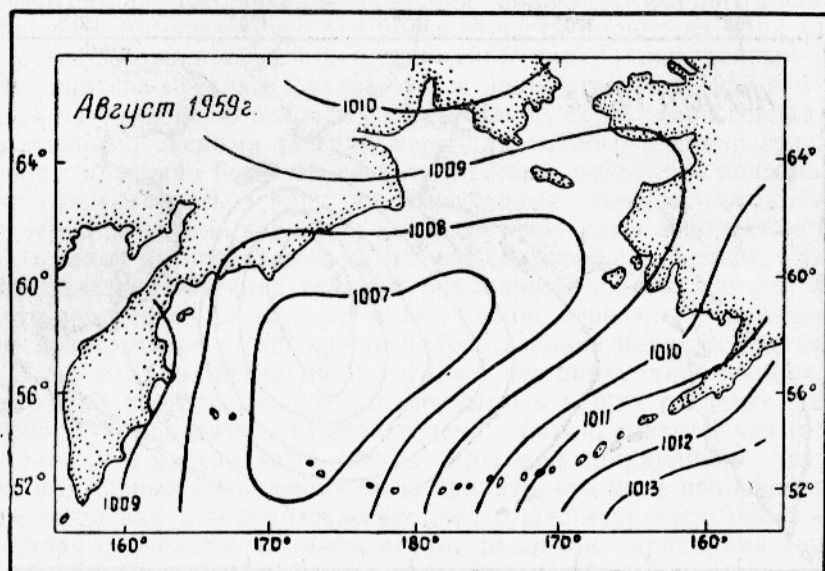


Рис. 9. Распределение атмосферного давления в мб над Беринговым морем.

Карты изолиний функций полных потоков характеризуют не движение частиц воды, а только общую картину переноса вод в исследуемом слое, т. е. водообмен между отдельными районами моря. Разность значений функций полных потоков ψ в любых двух точках соответствует количеству воды, протекающей от поверхности моря до нижней границы

бароклинного слоя между вертикалями, проведенными через эти точки.

Результаты вычислений величины и направления полного потока Φ могут быть также представлены в виде карты полных потоков. Построе-

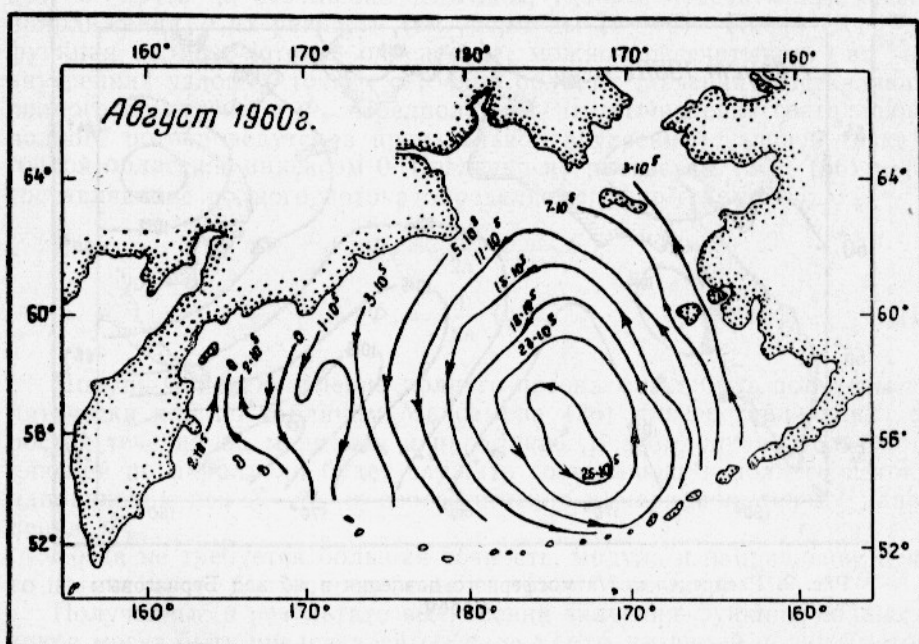
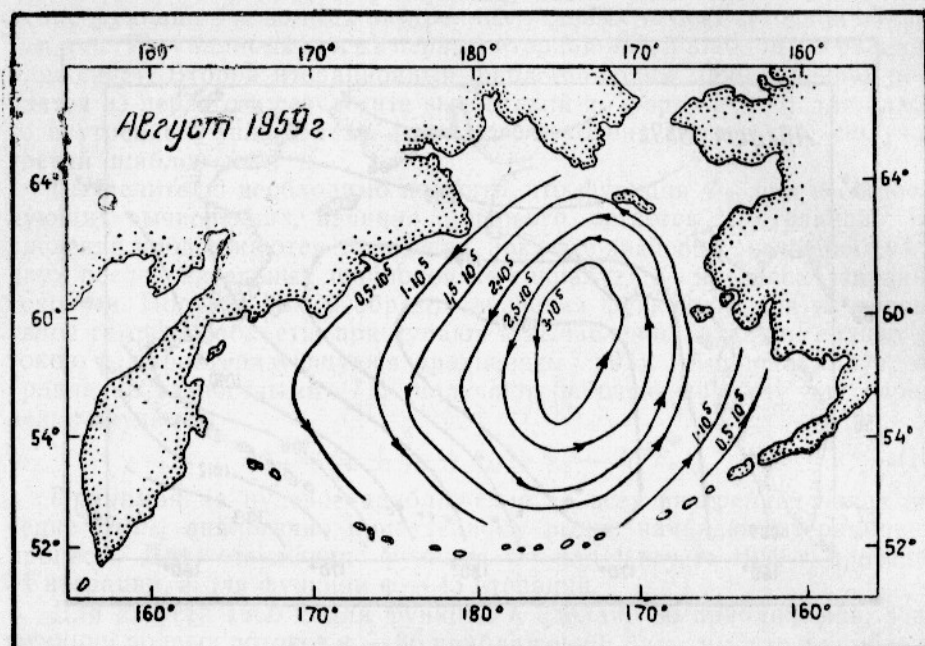


Рис. 10. Распределение функций полных потоков Ψ (в $\text{м}^3/\text{сек}$).

ние такой карты ничем не отличается от обычной карты течений на каком-либо горизонте, но с той разницей, что вместо скоростей течений здесь будут нанесены полные потоки.

Мы ограничились построением карты изолиний функций полных потоков, величина которых выражена $10^6 \text{ м}^3/\text{сек}$.

В результате расчетов были получены карты изолиний полных потоков ψ для августа 1959 и 1960 г. (рис. 10).

Несмотря на различие в строении поля атмосферного давления (см. рис. 8), оказывается, что для большей части Берингова моря характерно существование общей циклонической циркуляции полных потоков. Эта картина несколько усложняется лишь в августе 1959 г. в юго-западной части моря. В основных чертах такая циркуляция совпадает с существующими схемами течений моря для теплого времени года. Таким образом, можно было бы считать удачным подобного рода расчет. Однако следует иметь в виду, что полученные схемы отражают лишь общие черты движения вод и для перехода к течениям необходимо было бы знать закон распределения компонент скорости с глубиной, а также глубину залегания нижней границы бароклинного слоя. Следует отметить, что полученные результаты имеют вполне определенное значение в смысле возможности установления природы общей циркуляции течений моря. В расчетах мы исходили из того, что эта циркуляция возбуждается ветровыми процессами, представленными в наших расчетах полями атмосферного давления. Следовательно, можно считать, что именно этими силами и определяется общая круговая циркуляция течений. Однако в исходных положениях было принято, что море изолировано от океана, тогда как заведомо известно, что существует энергичный водообмен моря с океаном. В таком случае реальная циркуляция течений моря обусловлена двумя процессами — ветровой деятельностью над самим морем и водообменом с океаном. Наши расчеты показывают, что в движении участвуют около $1,5 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{сек}$, что составляет около 30% от общей величины водообмена Берингова моря с Тихим океаном.

По данным динамических расчетов в общей циркуляции моря участвует около $5 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{сек}$. Это означает, что по порядку величин наши расчеты можно считать удовлетворительными. Несмотря на то что доля ветровой циркуляции моря, возникающей в пределах самого моря, относительно невелика, мы имеем основание считать, что именно в ней и заключена главная причина общей системы течений моря. Это означает, что в самом море формируются условия для вовлечения тихоокеанских вод в движение.

А. М. Баталиным [2] было показано, что в проливе между Командорскими и Ближними о-вами поперечная неравномерность поля ветра обеспечивает вторжение тихоокеанских вод моря, а полученные нами результаты свидетельствуют о том, что эти воды включаются в собственное движение вод моря. Необходимо заметить, что наше решение имеет ограниченное значение и это связано с определением граничных условий для численного решения уравнения (55). Точное решение этого уравнения может быть получено в том случае, если будут заданы значения функции полных потоков ψ на жидких границах моря.

ВЫВОДЫ

1. Несмотря на различие в характере поля атмосферного давления над Беринговым морем в августе 1959 и 1960 г., расчеты авторов показали наличие в обоих случаях общей циклонической циркуляции полных потоков для большей части моря, что совпадает с общеизвестной схемой течений Берингова моря для теплого времени года и тем самым оправдывает применение условий расчета полных потоков, принятых авторами (море бароклинно и является замкнутым бассейном).

2. Полученные авторами результаты имеют значение для возможности установления природы общей циркуляции течений моря. По подсчетам авторов, в пределах Берингова моря ветровые процессы каждую

секунду вовлекают в движение около $150\,000\text{ м}^3$ воды, что составляет примерно одну треть водообмена Берингова моря с Тихим океаном. При сравнительно небольшой доле ветровой циркуляции моря, возникшей в пределах самого моря, авторы все же считают доказанным, что именно она влияет на общую систему течений моря, что условия для вовлечения в движение тихоокеанских вод, поступающих в Берингово море, формируются в самом море в результате поперечной неравномерности поля ветра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баталин А. М. Опыт расчета теплового баланса Берингова моря. Тр. Океанограф. комиссии АН СССР. Т. 7. Изд. АН СССР, 1960.
2. Баталин А. М. О водообмене Берингова моря с Тихим океаном. (Публикуется в настоящем сборнике).
3. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. II. М., Физматгиз, 1959.
4. Волюнский Б. А. и Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960.
5. Демидович Б. П. и Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.
6. Зенкевич Л. А. Моря СССР, их флора и фауна. Учпедгиз, 1955.
7. Климатический и гидрологический атлас Берингова моря. Сб. под ред. В. С. Самойленко. М., Гидрометеиздат, 1956.
8. Кочин Н. Е. Построение модели зональной циркуляции атмосферы. Тр. ГГО. Вып. 10, 1936.
9. Леонов А. К. Водные массы Берингова моря и течения на его поверхности. «Метеорология и гидрология» № 2, 1947.
10. Леонов А. К. Опыт количественного учета водной массы, тепла и солей, вносимых атлантическим и тихоокеанским течениями в Арктический бассейн. «Метеорология и гидрология» № 5, 1947.
11. Леонов А. К. Региональная океанография. Ч. 1, Гидрометеиздат, 1960.
12. Макаров С. О. «Витязь» и Тихий океан. Спб., 1894.
13. Максимов И. В. Основные приемы производства камеральной обработки наблюдений над течениями в море. Тр. АНИИ. Т. 195, 1941.
14. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, 1951.
15. Ратманов Г. Е. К гидрологии Берингова и Чукотского морей. Иссл. морей СССР. Вып. 25, Гидрометеиздат, 1937.
16. Ратманов Г. Е. К вопросу о водообмене через Берингов пролив. Иссл. морей СССР, Вып. 25, Гидрометеиздат, 1937.
17. Саркисян А. С. Расчет стационарных ветровых течений в океане. Изв. АН СССР. Серия геофиз. № 6, 1954.
18. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Е. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
19. Федоров К. Н. Результаты моделирования полных потоков в классической теории морских течений. Тр. ИОАН. Т. XIX. Академиздат, 1956.
20. Фельзенбаум А. И. Течения Охотского моря в предзимний период. Тр. Гос. океанограф. ин-та. Вып. 019, М., Гидрометеиздат, 1954.
21. Фельзенбаум А. И. Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. М., Изд-во АН СССР, 1960.
22. Штокман В. Б. Экваториальные противотечения в океанах. Основы теории. М., Гидрометеиздат, 1948.
23. Штокман В. Б. Влияние ветра на течения в Беринговом проливе. Тр. ИОАН. Т. XXV. Академиздат, 1957.
24. Шулейкин В. В. Краткий курс физики моря. М., Гидрометеиздат, 1959.
25. Dall W. H. Hydrologie des Bering-Meeress und der benachbarten Gewässer. Peterm. Geogr. Mitt. XXVII, 1891.
26. K. Hidaka. A theoretical study on the general circulation of the Pacific Ocean. Pacific Sea 9, 1952.
27. Munk W. H. On the wind-driven oceanic circulation «Journ. of Meteorol», V, 7, № 2. 1950.
28. Schulz B. Die Strömungen und die Temperatur-Verhältnisse des Stillen Oceans nördlich von 40° N-W einschliesslich des Bering-Meeress, Ann. d. Hydr., H. VI, 1911.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ
к книге «Советские рыбохозяйственные исследования
в северо-восточной части Тихого океана»

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
56	14 снизу	условная вертикальной стенки	условная вертикальная стенка
60	19 снизу	исключениям	искажениям
83	7 сверху	к северо-восточной	к северо-западной
83	8 сверху	на юго-западе	на юго-востоке
113	22 снизу	14 м.м	14 м
175	Подпись под рис. 4	А — возраст 9 +; Б — возраст 3 +	А — возраст 3 +; Б — возраст 9 +
176	Подпись под рис. 5, 10 сверху	в — зависимости	б — зависимости
191	Таблица 10, 3 снизу	10	100
196	Подпись под рис. 10	а — июнь — сентябрь	а — июнь — сентябрь 1957 г.
244	13 сверху	или первый, чаще второй	или первый, реже второй
246	29 снизу	по-видимому, был, а большая часть	по-видимому, была большая часть