

УДК 677.664.22

О НАТЯЖЕНИИ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОРМЕ КАНАТОВ В ПОТОКЕ ВОДЫ

Н. И. Алексеев

Канаты находят широкое применение в технике промышленного рыболовства и в морском деле. При проектировании многих орудий рыболовства необходимо рассчитать, какую форму примет канат в потоке воды, какое будет натяжение и сопротивление каната.

Различные приближенные решения этой задачи для случая пространственного расположения нерастяжимого каната в потоке получили академик Н. Е. Кочин, И. П. Тельных и И. Л. Деревинский. Все эти решения были основаны на одном и том же допущении относительно характера гидродинамических (или аэродинамических) сил, действующих на канат в потоке. Учитывалась только сила гидродинамического давления r_N , перпендикулярная направлению каната в плоскости потока (рис. 1). Зависимость величины этой силы от угла атаки каната выражалась конкретными эмпирическими функциями:

$$r_N = k \sin \alpha \quad \text{или} \quad r_N = k(\sin \alpha - a \cos \alpha).$$

В последние годы неоднократно проводились испытания канатов в различных аэродинамических лабораториях Советского Союза и за рубежом. В результате этих испытаний было установлено, что, кроме силы гидродинамического давления, на канат в потоке воды действует сила гидродинамического трения r_τ , направленная вдоль каната (рис. 1).

Эта сила становится заметной уже на углах атаки $50-60^\circ$. С уменьшением угла атаки каната сила трения быстро возрастает (по отношению к величине силы гидродинамического давления), а при углах атаки $7-10^\circ$ по величине даже превосходит силу гидродинамического давления. Кроме того, было установлено, что на канаты с числом прядей,

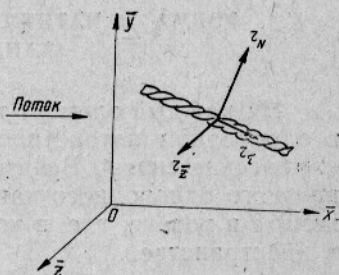


Рис. 1. Гидродинамические силы, действующие на единицу длины прямолинейного каната (канат расположен в плоскости xOy).

меньшим двадцати, действует боковая гидродинамическая сила r_z , возникающая из-за крутки каната и направленная перпендикулярно плоскости потока (см. рис. 1). Для шестипрядного стального каната, например, при углах атаки 50—60° величина боковой силы достигает 47% по сравнению с силой гидродинамического давления.

В свете этих данных предыдущие решения задачи, не учитывающие сил r_x и r_z , можно рассматривать только как весьма приближенные решения с очень ограниченной областью применения. Эти решения годятся для расчета лишь нерастяжимого каната с числом прядей, не меньшим двадцати, и только для тех случаев, когда канат принимает большие углы атаки (более 60°).

Для того чтобы получить решение, пригодное для расчета формы и натяжения любого каната при любом расположении его в потоке, необходимо учитывать точно все гидродинамические силы, действующие на канат. Задача при этом значительно усложняется.

Найти форму нерастяжимого каната в потоке с учетом сил гидродинамического давления r_N и трения r_x пытался Б. И. Халепский. Однако он в самом начале допустил ошибку и получил неверные уравнения равновесия каната в потоке¹.

Здесь мы изложим решение задач о пространственной форме и натяжении весомого каната в потоке воды в наиболее общей постановке: с точным учетом всех гидродинамических сил и с учетом растяжимости каната.

Рассмотрим вначале невесомый канат, затем учтем влияние сил тяжести.

§ 1. ФОРМА И НАТЯЖЕНИЕ НЕВЕСОМОГО РАСТЯЖИМОГО ГИБКОГО КАНАТА В ПОТОКЕ ВОДЫ

На каждый элемент невесомого каната, находящегося в равновесии в однородном потоке постоянной скорости, действуют только гидродинамические силы². Величина и направление этих сил для каждого конкретного однородного каната зависят только от ориентировки элемента каната в потоке, т. е. в конечном счете от направления элемента каната в пространстве.

Пусть внешняя сила $\bar{\Phi}$, действующая в потоке на единицу массы растяжимого каната, зависит от направления каната в пространстве, т. е. от направляющих косинусов каната: $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Тогда основное векторное дифференциальное уравнение равновесия каната примет вид:

$$\frac{dT}{ds} + \mu \bar{\Phi} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0, \quad (1)$$

где T — натяжение каната;
 s — длина каната при равновесии в растянутом состоянии;
 μ — линейная плотность каната в растянутом состоянии;
 x, y, z — текущие координаты каната в неподвижной системе декартовых координат.

¹ Б. И. Халепский разложил силу r_N по двум направлениям, а при составлении уравнений равновесия учел только одну из этих составляющих (направленную по потоку).

² Имеются в виду внешние силы.

Пусть линейная плотность каната до растяжения была $\mu_0 = \text{const}$, а длина каната до растяжения — l , тогда

$$\mu_0 dl = \mu ds,$$

отсюда

$$\frac{ds}{dl} = \frac{\mu_0}{\mu} = f(T),$$

здесь $f(T)$ — функция, выражающая закон статической растяжимости каната без учета релаксации и других временных последствий растяжения.

Преобразуем теперь уравнение (1)

$$\frac{dT}{ds} + \frac{\mu_0}{f(T)} \bar{\Phi} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0.$$

Обозначим внешнюю силу, действующую на единицу длины нерастянутого каната, через \bar{F} . Очевидно, $\bar{F} = \mu_0 \bar{\Phi}$, и основное векторное уравнение равновесия каната выразится в форме

$$\frac{dT}{ds} + \frac{1}{f(T)} \bar{F} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0.$$

Спроектируем это уравнение на оси координат и добавим уравнение неразрывности каната. Получим следующую систему дифференциальных уравнений равновесия невесомого гибкого произвольно растяжимого каната в потоке:

$$f(T) \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + F_x \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

$$f(T) \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + F_y \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

$$f(T) \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + F_z \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1;$$

здесь F_x, F_y, F_z — проекции силы \bar{F} на оси координат.

Таким образом, мы пришли к задаче о форме и натяжении однородной растяжимой гибкой нити в поле сил, зависящих от направления нити в пространстве. Отметим, что эта задача механики гибкой нити была решена автором ранее для нерастяжимой нити [3].

Раскроем производные в левых частях первых трех уравнений системы и прибавим к третьему уравнению, умноженному на $\frac{dz}{ds}$, первые два уравнения, умноженные соответственно на $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$.

Учитывая при этом четвертое уравнение системы, а также соотношение

$$\frac{d^2x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{dz}{ds} = 0,$$

сведем уравнения равновесия к следующему виду:

$$f(T) \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} + f(T) T \frac{d^2x}{ds^2} + F_x \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 f(T) \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} + f(T) T \frac{d^2y}{ds^2} + F_y \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) &= 0, \\
 f(T) \frac{dT}{ds} + \frac{dx}{ds} F_x \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) + \frac{dy}{ds} F_y \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) + \\
 + \frac{dz}{ds} F_z \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) &= 0, \\
 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 &= 1.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Без существенного уменьшения общности положим, что канат не образует прямого угла с какой-нибудь из осей координат. Пусть, например, канат нигде не перпендикулярен оси x . Решение задачи будем искать в виде пяти функций от направляющего косинуса $\frac{dx}{ds}$:

$$x, y, z, s, T / \frac{dx}{ds}. \tag{3}$$

Очевидно, эти функции целиком определяют форму и натяжение каната.

Введем новые переменные так, чтобы

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dy}{ds} = uv. \tag{4}$$

Тогда из четвертого уравнения системы (2) получим

$$\frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2}. \tag{5}$$

После такой замены переменных F_x , F_y и F_z выразятся в функциях от u и v , а первые три уравнения системы (2) преобразуются к виду

$$f(T) \frac{dT}{ds} u + f(T) T \frac{du}{ds} + F_x(u, v) = 0, \tag{6}$$

$$f(T) \frac{dT}{ds} u v + f(T) T \left(\frac{du}{ds} v + u \frac{dv}{ds} \right) + F_y(u, v) = 0, \tag{7}$$

$$f(T) \frac{dT}{ds} = -u F_x(u, v) - u v F_y(u, v) - \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v). \tag{8}$$

Из уравнения (7) вычтем уравнение (6), умноженное на v , и получим

$$f(T) T \frac{dv}{ds} = \frac{v}{u} F_x(u, v) - \frac{1}{u} F_y(u, v). \tag{9}$$

Из уравнений (6) и (8) найдем

$$\begin{aligned}
 f(T) T \frac{du}{ds} &= (u^2 - 1) F_x(u, v) + u^2 v F_y(u, v) + \\
 &+ u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Разделим уравнение (9) на уравнение (10). Получим разрешенное относительно производной дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dv}{du} = \frac{v F_x(u, v) - F_y(u, v)}{u(u^2 - 1) F_x(u, v) + u^3 v F_y(u, v) + u^2 \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}. \quad (11)$$

Методы приближенного интегрирования таких уравнений хорошо разработаны, и решение этого уравнения для каждого конкретного случая не представляет трудности. После того как будет определена зависимость $v(u)$, нахождение натяжения и формы каната (3) сводится к вычислению определенных интегралов.

Действительно, разделив уравнение (8) на уравнение (10), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dT}{Tdu} = \frac{u F_x(u, v) + u v F_y(u, v) + \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}{(1 - u^2) F_x(u, v) - u^2 v F_y(u, v) - u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)},$$

откуда после интегрирования определим натяжение каната

$$\ln T(u) = \int_{u_0}^u \frac{u F_x(u, v) + u v F_y(u, v) + \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}{(1 - u^2) F_x(u, v) - u^2 v F_y(u, v) - u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)} du = \varphi(u). \quad (12)$$

Заметим, что в это соотношение не входит закон растяжимости. Следовательно, зависимость натяжения от направления каната одна и та же как для нерастяжимого каната, так и для канатов с любыми законами растяжимости.

Проинтегрируем теперь уравнение (10). Получим длину как угодно растяжимого каната в потоке в зависимости от направляющего косинуса

$$s(u) = \int_{u_0}^u \frac{f(e^{\varphi(u)}) e^{\varphi(u)} du}{(u^2 - 1) F_x(u, v) + u^2 v F_y(u, v) + u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}. \quad (13)$$

В частности, для нерастяжимых канатов $f(T) = 1$ и предыдущий интеграл упрощается:

$$s(u) = \int_{u_0}^u \frac{e^{\varphi(u)} du}{(u^2 - 1) F_x(u, v) + u^2 v F_y(u, v) + u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}. \quad (14)$$

Для стальных канатов, растяжимость которых достаточно хорошо подчиняется закону Гука:

$$f(T) = 1 + \frac{T}{\sigma E},$$

где σ — площадь поперечного сечения каната до растяжения;

E — модуль упругости каната.

В этом случае

$$s(u) = \int_{u_0}^u \frac{1 + \left(\frac{e^{\varphi(u)}}{\sigma E} \right) e^{\varphi(u)} du}{(u^2 - 1) F_x(u, v) + u^2 v F_y(u, v) + u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}. \quad (15)$$

Для растительных канатов примем закон растяжимости, выведенный проф. Ф. И. Барановым. Согласно этому закону

$$f(T) = \frac{ds}{dl} = 1 + \frac{ds - dl}{dl} = 1 + n \sqrt{T},$$

где n — постоянный для каждого каната коэффициент.

Тогда зависимость длины каната от направляющего косинуса примет вид:

$$s(u) = \int_{u_0}^u \frac{(1 + ne^{\varphi(u)}) e^{\frac{1}{2}\varphi(u)} du}{(u^2 - 1) F_x(u, v) + u^2 v F_y(u, v) + u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} F_z(u, v)}. \quad (16)$$

Для полного определения формы каната найдем зависимости текущих координат каната от направляющего косинуса. С этой целью проинтегрируем уравнения (4) и (5)

$$x(u) = \int_{u_0}^u u ds(u), \quad (17)$$

$$y(u) = \int_{u_0}^u u v ds(u), \quad (18)$$

$$z(u) = \int_{u_0}^u \sqrt{1 - u^2 - u^2 v^2} ds(u). \quad (19)$$

Решение получено при условии, что известны начальные параметры: направление и натяжение каната в какой-либо точке.

§ 2. ФОРМА И НАТЯЖЕНИЕ ВЕСОМОГО РАСТЯЖИМОГО КАНАТА В ПОТОКЕ ВОДЫ

Выберем неподвижную систему декартовых координат таким образом, чтобы одна из осей координат была параллельна направлению поля сил тяжести. Пусть, например, ось y направлена вертикально вверх. Теперь для того, чтобы распространить решения § 1 на случай дополнительного воздействия сил тяжести, достаточно в окончательных формулах этих решений заменить F_y на $F_y - q$, где $q = \text{const}$ — вес в воде единицы длины нерастянутого каната.

Как видно, учет веса каната не вносит в полученное решение существенных усложнений.

§ 3. РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КАНАТ В ПОТОКЕ ВОДЫ

Прежде чем пользоваться выведенными формулами для расчета канатов, необходимо вначале выразить проекции F_x , F_y и F_z внешней силы на оси неподвижной системы координат в функциях от направляющих косинусов каната $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, а в дальнейшем — в функциях от u и v .

Вид этих функций будет различным в зависимости от выбора неподвижной системы координат и от способа разложения общей силы гидродинамического сопротивления, действующей на единицу длины каната.

При полном учете гидродинамических сил общую силу гидродинамического сопротивления удобнее раскладывать не так, как показано на рис. 1, а способом, общепринятым в экспериментальной аэродинами-

ке (рис. 2), а именно: на силу лобового сопротивления r_x , распорную силу r_y и боковую силу r_z . Эти силы рассчитывают по известным формулам

$$r_{\bar{x}} = C_{\bar{x}} \frac{\rho v^2}{2} D,$$

$$r_{\bar{y}} = C_{\bar{y}} \frac{\rho v^2}{2} D,$$

$$r_{\bar{z}} = C_{\bar{z}} \frac{\rho v^2}{2} D,$$

где $C_{\bar{x}}$, $C_{\bar{y}}$, $C_{\bar{z}}$ — безразмерные гидродинамические коэффициенты, зависящие от угла атаки, структуры каната и числа Рейнольдса;

ρ — массовая плотность воды;

v — скорость потока;

D — диаметр каната.

При постоянной скорости однородного потока для каждого конкретного каната эти силы зависят только от угла каната с потоком и могут быть выражены в функциях от косинуса угла атаки α

$$r_{\bar{x}}, r_{\bar{y}}, r_{\bar{z}} \propto \cos \alpha.$$

Выразим теперь внешние силы в функциях от u и v . Для примера рассмотрим тот случай, когда канат нигде не перпендикулярен потоку. Этот случай характерен для ваера и ряда других канатов.

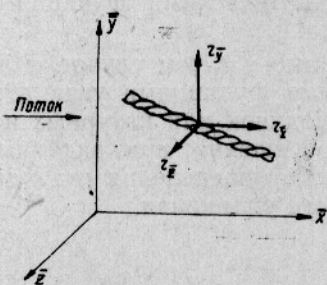


Рис. 2. Другой способ разложения гидродинамических сил, действующих на единицу длины прямолинейного каната.

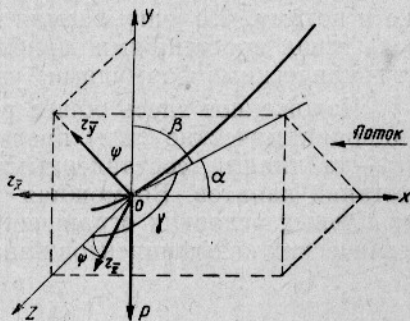


Рис. 3. Внешние силы, действующие на единицу длины каната в потоке воды.

Направим ось x навстречу потоку, ось y — вертикально вверх, ось z — горизонтально влево от направления потока. Начало координат для наглядности поместим в середину рассматриваемого элемента каната (рис. 3).

Пусть касательная ON к канату в точке O образует углы α , β , γ с осями координат. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = u,$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds} = uv,$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds}$$

и справедливо равенство

$$\cos \psi = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{uv}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Спроектируем гидродинамические силы на оси координат и учтем вес каната в воде. Получим окончательно

$$F_x(u) = -r_x(u),$$

$$F_y(u, v) = r_y(u) \frac{uv}{\sqrt{1-u^2}} - r_z(u) \sqrt{1 - \frac{u^2 v^2}{1-u^2}} - q,$$

$$F_z(u, v) = r_y(u) \sqrt{1 - \frac{u^2 v^2}{1-u^2}} + r_z(u) \frac{uv}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Интегрирование дифференциального уравнения первого порядка (11) и вычисление определенных интегралов могут быть произведены с любой требуемой точностью. Поэтому возможная точность определения формы и натяжения каната зависит только от того, насколько точно функции $r_x(u)$, $r_y(u)$ и $r_z(u)$ отображают экспериментальные данные. Точность всех предыдущих решений была ограниченной не только потому, что учитывались не все гидродинамические силы, но также и потому, что учитываемая гидродинамическая сила (r_N) отображалась лишь простейшими приближенными аналитическими функциями (эмпирическими формулами) угла атаки каната.

Изложенное здесь общее решение применимо и в том случае, если гидродинамические силы представлены точными функциями угла атаки — таблицами, составленными по данным продувок или натуральных испытаний канатов. Возможная точность такого решения при заданных начальных условиях ограничена лишь точностью определения гидродинамических коэффициентов канатов бесконечного удлинения.

ВЫВОДЫ

1. Определение пространственной формы и натяжения в потоке воды гибкого весомого растяжимого по любому закону каната в наиболее общем случае с точным учетом всех гидродинамических сил сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка (11) и к вычислению определенных интегралов.

2. Зависимость натяжения от направления каната в потоке одна и та же (12) для канатов с любыми законами растяжимости.

3. Форма стальных канатов с учетом растяжимости находится вычислением интегралов (15), (17), (18) и (19).

4. Форма растительных канатов с учетом растяжимости находится с помощью интегралов (16) — (19).

5. Для нерастяжимых канатов форма определяется интегралами (14), (17), (18) и (19).

6. Полученное решение позволяет рассчитать форму и натяжение гибкого каната в потоке воды с точностью, ограниченной лишь точностью определения безразмерных гидродинамических коэффициентов прямолинейного каната бесконечного удлинения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Н. И. О форме и натяжении ваера при тралении. «Рыбное хозяйство», 1963, № 5.
 2. Алексеев Н. И. Натурное определение гидродинамических характеристик ваерного троса. «Рыбное хозяйство», 1964, № 1.
 3. Алексеев Н. И. О фигуре равновесия и натяжения гибкой нити под действием внешних сил, зависящих от направления нити в пространстве. ПММ. Т. 28, Вып. 5, 1964.
 4. Баранов Ф. И. Теория и расчет орудий рыболовства, 1948.
 5. Деревинский И. Л. Об определении натяжения и фигуры равновесия проволочного каната в пространстве под действием сил тяжести и аэродинамических нагрузок. Труды Карагандинского горного института. Вып. 2, 1958.
 6. Кочин Н. Е. Об изгибе троса змейкового аэростата под действием ветра. ПММ. Т. 10, 1946.
 7. Матросов И. Р. Теоретические основы для расчета движения судна с тралом. «Рыбное хозяйство», 1961, № 6.
 8. Минаков А. П. Основы механики нити. Труды Московского текстильного института. Т. 9. Вып. 1, 1941.
 9. Тельных И. П. Метод решения задачи о равновесии тяжелой нити, нагруженной силами сопротивления равномерному движению в жидкости. Труды Мосрыбвуза. Вып. 5, 1953.
 10. Халепский Б. И. Равновесие нити в пространстве. Труды Карагандинского НИИ угольной промышленности. Вып. 4, 1959.
 11. Чубаров С. Н. О влиянии гидродинамических сил на ваер и выбор тросов для скоростного и глубоководного траления. «Рыбное хозяйство», 1962, № 5.
-