Том XC

ТРУДЫ ВСЕСОЮЗНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МОРСКОГО РЫБНОГО ХОЗЯЙСТВА И ОКЕАНОГРАФИИ (ВНИРО)

1972

УДК 551.465.7

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ТОЧКАХ НАБЛЮДЕНИЙ

З.И.Кизнер, В.И.Киньдюшев,
Э.И.Черный

При обработке гидрометеорологической информации часто возникает следующая задача. Значения некоторой функции z от двух переменных x, y (например, температуры на поверхности океана) известны в конечном числе точек плоскости. Требуется найти способ вычисления значений этой функции с достаточной точностью в любой другой точке плоскости (естественно, в некоторой ограниченной области). Можно потребовать и большего. Во-первых, чтобы объем вычислений при решении этой задачи был не слишком большим или, по крайней мере,чтобы одни и те же длинные вычисления не приходилось выполнять всякий раз, когда рассчитывается значение функции в новой точке. Для этого достаточно получить некоторую общую формулу, при подстановке в которую произвольных значений x и y можно быстро вычислить приближенное значение функции z. Во-вторых, можно потребовать, чтобы эта формула была удобной для экстраполяции рассматриваемого гидрометеорологического параметра по времени, т.е. чтобы по известным значениям параметра z, замеренным в кончном числе фиксированных точек синхронно в различные моменты времени, можно было получить формулу, которая представляла бы поле этого параметра на некоторый будущий момент времени.

Для этой цели удобна интерполяция функции $z = z(x,y)$ многочленом от двух переменных некоторой степени по методу наименьших квадратов. Именно: для каждого момента времени

t_i $(i = 1,\ldots,N)$ нужно построить многочлен

$$\zeta_i = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell} A_{pq}^{(i)} x^p y^q ,$$

где k и ℓ не зависят от i. Затем, рассматривая $A_{pq}^{(i)}$ при фиксированных p и q в качестве значений некоторой функции времени $A_{pq}(t)$ в моменты t_i, следует каким-либо способом проэкстраполировать функцию $A_{pq}(t)$ на некоторый будущий момент времени $t=\tau$ (например, статистически). Из полученных таким путем коэффициентов строится экстраполированное поле параметра z:

$$\zeta_\tau = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell} A_{pq}(\tau) x^p y^q .$$

Известны методы аналитического представления в виде многочленов реальных гидрометеорологических полей [1 - 3], однако эти методы действуют только в случае, когда точки, в которых значения функции z известны, являются узлами прямоугольной сетки на плоскости.

В настоящей работе поставленная задача решается без подобных ограничений. Более того, излагаемый ниже метод почти дословно может быть перенесен на случай интерполяции функции любого числа переменных, если значения такой функции известны в произвольном конечном наборе точек. Это позволит отказаться от требования синхронности замеров (по крайней мере, для медленных и гладких процессов). Действительно, достаточно, считая время третьим аргументом функции z, проинтерполировать ее многочленом как функцию трех переменных:

$$\zeta = \sum_{p,q,s} A_{pqs} x^p y^q t^s . \qquad (1)$$

Задача экстраполяции в этом случае будет решаться простой подстановкой будущего момента времени $t=\tau$ в формулу (1).

Строгая формулировка задачи

Пусть на поскости с декартовыми координатами x, y задано произвольное конечное множество $\mathfrak{M}$, состоящее из n точек с координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, и в этих точках известны значения функции $z(x,y)$, именно: $z(x_i, y_i) = z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Среди всех многочленов от двух переменных x, y степени не выше $m = k + l$ (k - старшая степень x, а l - старшая степень y) мы хотим отыскать такой многочлен $\zeta = \zeta(x,y)$, квадратичное отклонение которого от функции z на множестве $\mathfrak{M}$,

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[z_i - \zeta(x_i, y_i) \right]^2, \qquad (2)$$

минимально.

Такой многочлен мы будем называть м н о г о ч л е н о м н а и л у ч ш е г о п р и б л и ж е н и я.

Система многочленов, ортогональных на множестве $\mathfrak{M}$

Всякий многочлен $\eta = \eta(x,y)$ от двух переменных x, y степени $m = k + l$ представляется в виде линейной комбинации одночленов $x^p y^q$ $(p = 0, \ldots, k; \quad q = 0, \ldots, l)$:

$$\eta = \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{l} c_{pq} \, x^p y^q , \qquad (3)$$

причем система функций $\{x^p y^q\}$ л и н е й н о н е з а в и с и м а, т.е. представление многочлена η в виде (3) однозначно. Иными словами, ни один из одночленов системы $\{x^p y^q\}$ не может быть представлен в виде линейной комбинации других.

Критерий качества приближения (2) учитывает только значения функций в точках множества $\mathfrak{M}$, поэтому интересовать нас должны не сами функции (в частности, многочлены), а их значения в точках множества $\mathfrak{M}$. Здесь уже может возникнуть такая ситуация, когда о г р а н и ч е н и е некоторого одночлена $x^s y^t$ на множество $\mathfrak{M}$ линейно выражается через ограничения других одночленов, т.е., что существует такой многочлен

$$\omega=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq s}}^{k}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq t}}^{l} a_{ij}x^i y^j ,$$

ограничение которого на множество $\mathfrak{M}$ совпадает с ограничением одночлена $x^s y^t$, так что $\omega(x_i, y_i)=x_i^s y_i^t$ при i =1, ..., n. В таком случае система одночленов $\{x^p y^q\}$ называется линейно зависимой на множестве $\mathfrak{M}$. Этот и другие одночлены, обладающие таким же свойством, без всякого ущерба для точности приближения мы можем исключить из системы $\{x^p y^q\}$ и искать многочлен наилучшего приближения как линейную комбинацию оставшихся одночленов, которые образуют уже линейно независимую на множестве $\mathfrak{M}$ систему.

Проверять непосредственно, какие одночлены следует исключить из системы $\{x^p y^q\}$ было бы затруднительно, поэтому мы поступим несколько иначе.

Для любых двух функций $f=f(x,y)$ и $g=g(x,y)$ определим скалярное произведение на множестве $\mathfrak{M}$:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)g(x_i,y_i). \qquad (4)$$

Будем называть функции f и g ортогональными на множестве $\mathfrak{M}$, если $\langle f,g\rangle$ =0. Для всякой функции $f=f(x,y)$ можно определить ее норму на множестве $\mathfrak{M}$:

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}, \qquad (5)$$

поскольку $\langle f,f\rangle\geqslant 0$.

Исходя из системы одночленов $\{x^p y^q\}$, по следующим рекуррентным формулам, построим систему многочленов

$$\zeta_{pq}=\zeta_{pq}(x,y) \qquad (p=0,\dots,k;\ q=0,\dots,l),$$

причем, если окажется, что какой-то многочлен ζ_{uv} принимает на множестве $\mathfrak{M}$ нулевые значения, т.е. что $\|\zeta_{uv}\|$ = 0, то во всех следующих формулах символу $\frac{\langle x^p y^q, \zeta_{uv}\rangle}{\|\zeta_{uv}\|^2}$ для определенности будем придавать значение 0 (в данном случае символу $\dfrac{\langle x^p y^q, \zeta_{uv}\rangle}{\|\zeta_{uv}\|^2}$ можно придавать любые значения, нельзя только вычислять его по формулам (4) и (5), так как применение этих формул дает $\frac{0}{0}$):

$$\zeta_{00} = 1,$$

$$\zeta_{01} = y - \frac{\langle y, \zeta_{00}\rangle}{\|\zeta_{00}\|^2}\zeta_{00},$$

$$\zeta_{02} = y^2 - \frac{\langle y^2, \zeta_{01}\rangle}{\|\zeta_{01}\|^2}\zeta_{01} - \frac{\langle y^2, \zeta_{00}\rangle}{\|\zeta_{00}\|^2}\zeta_{00},$$

. . . .

$$\zeta_{0\ell} = y^\ell - \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{\langle y^\ell, \zeta_{0i}\rangle}{\|\zeta_{0i}\|^2}\zeta_{0i},$$

$$\zeta_{10} = x - \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\langle x, \zeta_{0i}\rangle}{\|\zeta_{0i}\|^2}\zeta_{0i},$$

$$\zeta_{11} = xy - \frac{\langle xy, \zeta_{10}\rangle}{\|\zeta_{10}\|^2}\zeta_{10} - \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\langle xy, \zeta_{0i}\rangle}{\|\zeta_{0i}\|^2}\zeta_{0i},$$

. . . .

$$\zeta_{1\ell} = xy^\ell - \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{\langle xy^\ell, \zeta_{1i}\rangle}{\|\zeta_{1i}\|^2}\zeta_{1i} - \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\langle xy^\ell, \zeta_{0i}\rangle}{\|\zeta_{0i}\|^2}\zeta_{0i},$$

. . . .

$$\zeta_{pq} = \begin{cases} x^p y^q - \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q-1} \frac{\langle x^p y^q, \zeta_{ij}\rangle}{\|\zeta_{ij}\|^2}\zeta_{ij} & \text{при} \quad q \neq 0, \\ x^p y^q - \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{\ell} \frac{\langle x^p y^q, \zeta_{ij}\rangle}{\|\zeta_{ij}\|^2}\zeta_{ij} & \text{при} \quad q = 0, \end{cases}$$

. . . .

$$\zeta_{k\ell} = x^k y^\ell - \sum_{i=0}^{k}\sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{\langle x^k y^\ell, \zeta_{ij}\rangle}{\|\zeta_{ij}\|^2}\zeta_{ij}.$$

Перечислим некоторые свойства системы многочленов $\{\zeta_{pq}\}$.

1. Любые два различных многочлена системы ζ_{pq} и ζ_{st} взаимно ортогональны, т.е. $\langle\zeta_{pq},\zeta_{st}\rangle = 0$.

2. Если многочлен ζ_{uv} равен нулю на множестве $\mathfrak{M}$, т.е. $\|\zeta_{uv}\| = 0$, то ограничение одночлена $x^u y^v$ линейно выражается через ограничения остальных одночленов (точнее, через ограничения элементов системы $\{x^i y^j\}$ $i = 0, \ldots u$, $j = 0, \ldots, v-1$ при $v \neq 0$ или $i = 0, \ldots, u-1$, $j = 0, \ldots, \ell$, при $v = 0$).

3. Если исключить из системы $\{\zeta_{pq}\}$ многочлены нулевой нормы, то получится линейно независимая на множестве $\mathfrak{M}$ система многочленов, т.е. ограничения многочленов ζ_{pq} на множество $\mathfrak{M}$ представляет собой линейно независимую систему функций, определенных на $\mathfrak{M}$. Другими словами, какой бы многочлен $\alpha = \alpha(x,y)$ из новой системы мы ни взяли, из оставшихся многочленов нельзя сконструировать такой многочлен $\beta = \beta(x,y)$, который совпадал бы с α на множестве $\mathfrak{M}$, т.е., чтобы $\alpha(x_i,y_i) = \beta(x_i,y_i)$ при $i = 1, \ldots, n$.

4. Исключим из системы $\{\zeta_{pq}\}$ многочлены нулевой нормы. Полученная система эквивалента системе одночленов $\{x^p y^q\}$, из которой по приведенному выше принципу исключены «лишние» элементы, в том смысле, что всякий многочлен, линейно выражающийся через элементы одно̆ системы, линейно выражается и через элементы другой.

Итак, мы можем искать многочлен наилучшего приближения в виде

$$\zeta = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell} A_{pq}\,\zeta_{pq}, \qquad (6)$$

полагая (опять-таки для определенности) A_{pq} равным нулю, если $\|\zeta_{pq}\| = 0$.

Существование и единственность многочлена наилучшего приближения

Т е о р е м а. Для каждой функции $z = z(x,y)$ среди всех многочленов степени $m=k+l$ (k - старшая степень x, а l - старшая степень y) с у щ е с т в у ю т многочлены наилучшего приближения, а среди всех многочленов, линейно выражающихся через элементы системы $\{\zeta_{pq}\}$ (из которой исключены многочлены, равные нулю на множестве $\mathfrak{M}$), существует е д и н с т в е н н ы й многочлен наилучшего приближения $\zeta = \zeta(x,y)$, и он представляется в виде (6), где

$$A_{pq} = \begin{cases} \dfrac{\langle z, \zeta_{pq}\rangle}{\|\zeta_{pq}\|^2} & \text{при } \|\zeta_{pq}\| \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сказанного выше ясно, что в доказательстве нуждается только вторая часть утверждения.

Пусть $\xi = \xi(x,y)$ - некоторый многочлен степени $m=k+l$, линейно выражающийся через элементы системы $\{\zeta_{pq}\}$

$$\xi = \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}\zeta_{pq}.$$

Вычислим квадрат отклонения многочлена $\xi = \xi(x,y)$ от функции z на множестве $\mathfrak{M}$, т.е.

$$\|\xi - z\|^2 = \delta^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[z_i - \xi(x_i,y_i)\right]^2 = \langle z-\xi, z-\xi\rangle.$$

Ясно, что эти равенства можно продолжить следующим образом:

$$\langle z-\xi, z-\xi\rangle = \langle z,z\rangle - 2\langle z,\xi\rangle + \langle \xi,\xi\rangle =$$

$$\langle z,z\rangle - 2\Big\langle z, \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}\zeta_{pq}\Big\rangle + \Big\langle \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}\zeta_{pq}, \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}\zeta_{pq}\Big\rangle.$$

Используя свойство ортагональности многочленов системы и определение скалярного произведения, это выражение можно преобразовать так:

$$\delta^2 = \langle z,z\rangle - 2\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}\langle z,\zeta_{pq}\rangle + \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}^2\langle \zeta_{pq},\zeta_{pq}\rangle.$$

Подставляя сюда выражение $\langle z, \zeta_{pq}\rangle$ из (7), получим

$$\delta^2 = \|z\|^2 - 2\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} A_{pq}B_{pq}\|\zeta_{pq}\|^2 + \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{l} B_{pq}^2\|\zeta_{pq}\|^2.$$

Прибавляя и вычитая в правой части выражение $\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell} A_{pq}^2\|\zeta_{pq}\|^2$, мы получаем

$$\delta^2=\|z\|^2+\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell}(A_{pq}^2-2A_{pq}B_{pq}+B_{pq}^2)\|\zeta_{pq}\|^2-\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell}A_{pq}^2\|\zeta_{pq}\|^2$$

или

$$\delta^2=\|z\|^2+\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell}(A_{pq}-B_{pq})^2\|\zeta_{pq}\|^2-\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell}A_{pq}^2\|\zeta_{pq}\|^2 \qquad (8)$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части равенства (8)

$$\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{\ell}(A_{pq}-B_{pq})^2\|\zeta_{pq}\|^2$$

положительно, причем только это слагаемое зависит от того, какой многочлен ξ выбран из множества всех многочленов степени $m=k+\ell$, выражаемых через элементы системы $\{\zeta_{pq}\}$. Ясно, что минимального значения δ_{min} величина δ достигает, когда второе слагаемое в (8) равно нулю, т.е.,если в многочленах ξ и ζ равны коэффициенты при тех ζ_{pq}, для которых $\|\zeta_{pq}\|\neq 0$.

Поскольку мы ищем многочлен наилучшего приближения среди многочленов, линейно выражающихся через многочлены ζ_{pq} с ненулевой нормой, то при элементе ζ_{pq}, для которого $\|\zeta_{pq}\|=0$, следует положить $B_{pq}=0$. Следовательно, величина δ достигает своего минимального значения δ_{min}, когда $\xi(x,y)=\zeta(x,y)$.

Теорема доказана.

Отметим еще раз, что построенный многочлен $\zeta(x,y)$,вообще говоря, не является единственным многочленом наилучшего приближения. Могут существовать еще и другие многочлены степени $m=k+\ell$, которые на множестве $\mathfrak{M}$ отклоняются от функции $z=z(x,y)$ на δ_{min}.(При построении многочлена наилучшего приближения имеется двойной произвол: во-первых, при построении системы $\{\zeta_{pq}\}$ортогональных на множестве $\mathfrak{M}$ многочленов коэффициенты при ζ_{uv} с нулевой нормой ($\|\zeta_{uv}\|=0$) могут быть любыми и, во-вторых, в формуле (6) не обязательно полагать $A_{pq}=0$ при ζ_{pq} нулевой нормы.) Однако мы не вправе отдать какому-либо из них предпочтение, поскольку не имеем возможности проверить качество приближения в других точках (ведь значения фукции известны нам лишь в точках множества $\mathfrak{M}$). Впрочем, если число n достаточно велико (n всегда не меньше $(k+1)(\ell+1)$) и точки множества $\mathfrak{M}$ достаточно равномерно распределены в пределах некоторой области, то этой ситуации не возникнет.

Итак, задавшись некоторым положительным числам ε (представляющим требуемую точность интерполяции) и увеличивая постепенно k и ℓ , мы можем добиться того, чтобы выполнялось неравенство $\delta_{min}(k,\ell) \leqslant \varepsilon$. Очевидно, при одном и том же ε для разных функций (значения которых известны на одном и том же множестве $\mathfrak{M}$) могут потребоваться разные пары чисел k,ℓ. Для выделения классов функций, которым соответствуют одни и те же k и ℓ и для определения этих k и ℓ в зависимости от ε необходимо провести широкий вычислительный эксперимент.

Литература

I. Багров Н.А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. - Тр.ЦИП, вып.74, I959.

2. Гаас А.В. Анализ успешности аппроксимации приземного поля давления по полиномам Чебышева. - Тр.ААНИИ,т.227,I966.

3. Калмыкова Н.М. Аналитическое представление полей метеорологических элементов. Тр.ЦИП, вып.46, I956.

THE ANALYTIC REPRESENTATION OF HYDROMETEOROLOGIC FIELDS AT RANDOMIZED POINTS OF OBSERVATIONS

Z.I.Kizner, V.I.Kindyushev, E.I.Cherny

Summary

The method of analytic representation of two-dimentional hydrometeorologic fields by approximating them with multinomials from two variables by the method of the least squares suggests that points where the values of the field are considered to be known may be arranged on the plane at random.

The method can be easily generalized for three-dimentional fields. It will provide an opportunity of eliminating the requirement to make observations in various points at the same time and of using the method for extrapolation of hydrometeorologic characteristics in time in the studies of slow and smooth processes.