ТОМ СШ | ТРУДЫ ВСЕСОЮЗНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МОРСКОГО РЫБНОГО ХОЗЯЙСТВА И ОКЕАНОГРАФИИ (ВНИРО) | 1974

УДК 551.465 (262.54)

О ДИНАМИКЕ ТЕЧЕНИЙ АЗОВСКОГО МОРЯ

Д.М.Толмазин, А.Л.Суворовский
Одесское отделение
Института экономики АН УССР

Знание систем течений в море служит основой для изучения распределения главнейших абиотических факторов, определяющих рыбопродуктивность водоема. В мелководном Азовском море, где рыбное хозяйство является одной из важнейших отраслей экономики, чрезвычайно актуальной стала задача поддержания качества воды в пределах некоторой нормы, допускающей воспроизводство основных биологических объектов бассейна. Среди прочих компонентов, входящих в понятие "качество" (сюда могут быть отнесены характеристики газового режима, термики моря, степени обводненности устьевых участков и т.д.), обычно выделяют соленость моря как основное свойство, показывающее степень влияния производства на морскую среду.

Проводившиеся до настоящего времени исследования распределения солености в Азовском море основаны либо на балансовых методах, либо на эмпирических связях солености в разных районах со средней соленостью моря (Альтман, 1972; Симонов, Гонтарев, 1972). Использование расчетного поля течений, полученного на основании стационарной модели мелкого моря (Толмазин и др., 1969), также не может дать качественно объяснимого результата, поскольку пренебрежение силой Кориолиса и допущение постоянства коэффициента обмена с глубиной сильно сглаживает поле средней скорости, т.е. именно то поле, которое формирует адвективную составляющую переноса солей.

В данной работе приведена модель стационарных течений, лишенная в известной мере упомянутых недостатков. Рассматриваются течения, возбуждаемые ветром, источниками и стоками в море с водой постоянной плотности. Соответствующая система уравнений (Фельзенбаум,1968) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial u}{\partial z} + \Omega v = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial v}{\partial z} - \Omega u = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \qquad (I)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_x + \frac{\partial}{\partial y} S_y = 0 \qquad (2)$$

где u и v – составляющие течений вдоль осей x и y прямоугольной системы координат с началом, помещенным на невозмущенной поверхности моря (ось z направлена вертикально вниз);

A_z – коэффициент вертикального турбулентного обмена;

Ω – параметр Кориолиса;

g – ускорение силы тяжести;

ζ – превышение свободной поверхности над невозмущенным уровнем;

$S_x=\int_0^H u\,dz,\ S_y=\int_0^H v\,dz$ – составляющие полного потока.

Граничные условия вытекают из задания тангенциальной составляющей ветра $\vec{T}$ на поверхности и условия прилипания на дне:

$$z=0 \qquad A_z\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{T_x}{\zeta},\ A_z\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{T_y}{\zeta}; \qquad (5)$$

$$z=H \qquad u=v=w=0. \qquad (6)$$

Система уравнений (I),(2) замыкается полуэмпирическим уравнением баланса кинетической энергии турбулентности (Монин, Яглом,1965) :

$$A_z\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] - C\frac{b^2}{A_z} + \alpha_b\frac{\partial}{\partial z} A_z\frac{\partial b}{\partial z} = 0. \qquad (7)$$

Величина энергии турбулентности b связывается с коэффициентом вертикального обмена A_z гипотезой Колмагорова (Монин, Яглом, 1965):

$$A_z = l\sqrt{b}, \tag{8}$$

где l – масштаб турбулентности, определяемый моделью Лайхтмана-Зилитинкевича (Вагер и др.,1968)

$$l = \varkappa 2 c^{\frac{1}{4}} \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} \; ; \; \psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{\alpha_b}{A_z} \frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial b}{\partial z}. \tag{9}$$

Граничные условия для уравнения(7) вытекают из условия отсутствия диффузии энергии турбулентности через поверхность моря и через дно. Математическая запись этих условий приведена ниже.

Введем функции φ_1 и φ_2 по формулам

$$\varphi_1 = A_z \frac{\partial u}{\partial z} \qquad\qquad \varphi = A_z \frac{\partial v}{\partial z} \tag{10}$$

Подставим (10) в (1) и, продифференцировав уравнение (1) по z, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \Omega \frac{\varphi_2}{A_z} = 0 \; ; \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \Omega \frac{\varphi_1}{A_z} = 0 \; .$$

Граничными условиями для уравнения (11) на поверхности моря будут

$$z = 0 \quad \varphi_1 = \frac{T_x}{\rho}; \quad \varphi_2 = \frac{T_y}{\rho}, \tag{12}$$

а граничные условия на дне находим из уравнения (1), устремляя z к H и учитывая (6):

$$z=H \qquad \frac{\partial}{\partial z}\varphi_1=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial z}\varphi_2=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}. \tag{I2^{I}}$$

Граничные условия для уравнения (7) после введения функций и примут вид

$$z=0 \qquad b=\frac{|\vec{T}|}{\rho}=\frac{\sqrt{T_x^2+T_y^2}}{\rho};$$

$$z=H \qquad b=\frac{\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2}}{\rho}. \tag{I3}$$

Умножив второе из уравнений (II) на i и сложив с первым, получим

$$\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial z^2}-i\,\frac{\Omega}{A_z}\vec{\varphi}=0 \tag{I4}$$

с граничными условиями

при $z=0 \qquad \varphi=-\frac{\vec{T}}{\rho}$

$$z=H \qquad \frac{\partial}{\partial z}\vec{\varphi}=-g\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \tag{I5}$$

где $\vec{\varphi}=\varphi_1+i\varphi_2$; $\vec{T}=T_x+i\,T_y$.

Подставив формулы (I0) в уравнение (7), получим

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2-cb^2+\alpha_b A_z\frac{\partial}{\partial z}\,A_z\frac{\partial b}{\partial z}=0. \tag{I6}$$

Из условия (8),(9) и уравнения (7) получим дифференциальное уравнение, связывающее коэффициент A_z и b :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A_z}{b}\right)=\varkappa c^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}. \tag{I7}$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$z=\tilde{z}L_z,\ x=\tilde{x}L_x,\ y=\tilde{y}L_y,\ \zeta=\tilde{\zeta}L_z,\ H=\tilde{H}L_z\ ;$$

$$u=\tilde{u}\varkappa^{-2}\Omega L_z,\ v=\tilde{v}\varkappa^{-2}\Omega L_z,\ w=\tilde{w}\varkappa^{-4}g^{-1}\Omega L_z\ ;$$

$$A_z=\tilde{A}_z\Omega L_z^2,\ \ b=\tilde{b}(\varkappa^{-1}\Omega L_z)^2c^{-\frac{1}{2}},\ \varphi_1=\tilde{\varphi}_1(\varkappa^{-1}\Omega L_z)^2;$$

$$\varphi_2=\tilde{\varphi}_2(\varkappa^{-1}\Omega L_z)^2,\ T_x=\tilde{T}_x\rho(\varkappa^{-1}\Omega L_z)^2,\ T_y=\tilde{T}_y\rho(\varkappa^{-1}\Omega L_z)^2;$$

$$L_z=H_{max},\ L_x=L_y=\varkappa^2 g\Omega^{-2}.$$

Перейдем к новым переменным в уравнениях (II),(7) и (I7):

$$\frac{\partial^2}{\partial\tilde{z}^2}\tilde{\vec{\varphi}}-\frac{i}{A_z}\tilde{\vec{\varphi}}=0\ ; \qquad (I8)$$

$$\tilde{\varphi}_1^2+\tilde{\varphi}_2^2-\tilde{b}^2+\gamma\tilde{A}_z\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\tilde{A}_z\frac{\partial\tilde{b}}{\partial\tilde{z}}=0\ ; \qquad (I9)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{A}_z}{\tilde{b}}\right)=\tilde{b}^{-\frac{1}{2}}, \qquad (20)$$

где $\gamma=\alpha_b\varkappa^2c^{-\frac{1}{2}}$.

Анализ полученных уравнений показывает, что все члены имеют одинаковый порядок, за исключением члена $A_z\frac{\partial}{\partial z}A_z\frac{\partial b}{\partial z}$, который имеет безразмерный коэффициент γ .

Граничные условия приобретают вид

$$z=0\quad \tilde{\varphi}_1=-\tilde{T}_x;\ \tilde{\varphi}_2=-\tilde{T}_y;\ \vec{\tilde{\varphi}}=-\vec{\tilde{T}};$$

$$z=H\quad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\tilde{\varphi}_1=-\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{x}};\ \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\tilde{\varphi}_2=-\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{y}};\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\vec{\tilde{\varphi}}=-\left(\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{x}}+i\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{y}}\right); \tag{21}$$

$$z=0\quad \tilde{b}=c^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tilde{T}_x^2+\tilde{T}_y^2};$$

$$z=H\quad \tilde{b}=c^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tilde{\varphi}_1^2+\tilde{\varphi}_2^2}. \tag{22}$$

Для удобства изложения опустим знак тильда над безразмерными переменными.

Предлагается следующая схема решения. Полагая функции $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ и A_z известными, найдем решение уравнения (I8). Оно будет иметь вид

$$\vec{\varphi}=\vec{\varphi}\left(z,x,y,\frac{\partial\zeta}{\partial x},\frac{\partial\zeta}{\partial y},A_z\right), \tag{23}$$

Причем $\varphi_1=Re\,\vec{\varphi};\ \varphi_2=Im\,\vec{\varphi}$.

Проинтегрировав уравнения (II) от 0 до H, получим

$$\varphi_1\Big|_{z=H}-\varphi_1\Big|_{z=0}+S_y=-H\frac{\partial\zeta}{\partial x};$$

$$\varphi_2\Big|_{z=H}-\varphi_2\Big|_{z=0}-S_x=-H\frac{\partial\zeta}{\partial y}.$$

Из граничных условий (2I) и выражения (23) имеем

$$S_y = -H\frac{\partial\zeta}{\partial x} - T_x - Re\,\vec{\varphi}\left(H, x, y, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, A_z\right);$$

$$S_x = H\frac{\partial\zeta}{\partial y} + T_y + \mathcal{I}_m\,\vec{\varphi}\left(H, x, y, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}; \; A_z\right). \qquad (24)$$

Подставляя (24) в уравнение неразрывности (2) получаем

$$\mathcal{J}(H,\zeta) - rot_z\left[\vec{T} - \vec{\varphi}\left(H, x, y, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, A_z\right)\right] = 0, \qquad (25)$$

где $\mathcal{J}(H,\zeta) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$; $rot_z\vec{B} = \frac{\partial}{\partial y}Re\vec{B} - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_m\vec{B}$,

с граничными условиями на контуре моря (Фельзенбаум, 1970):

$$S_n = S_x\cos\alpha + S_y\sin\alpha = \Phi(L), \qquad (26)$$

где α - угол наклона нормали к контуру L, с осью x.

Подставив в (26) выражение (24), найдено:

Пусть решение уравнения (25) с граничными условиями (26) найдено:

$$\zeta = \zeta(H, x, y, A_z). \qquad (27)$$

Подставив (27) в (23), а затем (23) в (19) и решая совместно уравнение (19) и (20), находим функцию $A_z = A_z(z, x, y)$, после чего подставляем найденное решение в (23) и получаем окончательное решение для $\vec{\varphi}(x, y, z)$.

По формулам $u = \int_z^H \varphi_1 dz$, $v = \int_z^H \varphi_2 dz$ определяем u и v, затем при помощи уравнения неразрывности в обычном виде $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, *откуда* $W = \int_z^H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz$, окончательно решаем задачу.

По этой схеме построим процесс численной итерации для A_z, полагая $A_z = A_z^0 = const$ и принимая для этого случая гипотезу Колмогорова в форме

$$A_z = l^* \frac{1}{H}\int\limits_0^H \sqrt{b}\, dz, \tag{28}$$

где l^* – некоторая безразмерная постоянная.

В этом случае система уравнений приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial z^2} - \frac{i}{A_z}\vec{\varphi} = 0; \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} S_x + \frac{\partial}{\partial y} S_y = 0; \tag{30}$$

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - b^2 + \gamma A_z^2 \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0. \tag{31}$$

при граничных условиях (21), (22). К ним добавляется соотношение (28).

На первом шаге решается уравнение (29) с граничными условиями (21). Решение имеет вид

$$\vec{\varphi} = -\frac{\vec{T} l^{-\lambda H} + \frac{\vec{G}}{\lambda}}{2ch\lambda H} l^{\lambda z} + \frac{\frac{\vec{G}}{\lambda} - \vec{T} l^{\lambda H}}{2ch\lambda H} l^{-\lambda H}, \tag{32}$$

где $\lambda^2 = \frac{i}{A_z}$, $\vec{T} = T_x + iT_y$, $\vec{G} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i\frac{\partial \zeta}{\partial y}$.

Интегрируя обезразмеренные уравнения (I) от 0 до H, получаем

$$\vec{\varphi}\Big|_{z=H} - \vec{\varphi}\Big|_{z=0} - i\vec{S} = -H\vec{G},$$

где $\vec{S} = S_x + iS_y$,

или, подставляя (32) и граничные условия (2I),

$$\vec{S} = \vec{T}\left[i\left(\frac{1}{ch\lambda H} - 1\right)\right] + \vec{G}\left[i\left(\frac{th\lambda H}{\lambda} - H\right)\right]. \qquad (33)$$

Обозначим $i\left(\frac{1}{ch\lambda H} - 1\right) = \vec{P}$, $i\left(\frac{th\lambda H}{\lambda} - H\right) = Q$.

Тогда $\vec{S} = \vec{T}\vec{P} + \vec{G}\vec{Q}$.

Подставив (33) в уравнение (30), получим

$$div\,\vec{S} = R_e\vec{Q}\,\Delta\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\,div\,\vec{Q} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\,rot_z\vec{Q} + R_e\vec{P}\,div\,\vec{T} -$$

$$- J_m\vec{P}\,rot_z\vec{T} + T_x\,div\,\vec{P} - T_y\,rot_z\vec{P} = 0. \qquad (34)$$

Граничными условиями для уравнения (34) будут (26), и условие (26) примет вид

$$R_e\vec{Q}\frac{\partial\zeta}{\partial\tilde{n}} - \zeta_m\vec{Q}\frac{\partial\zeta}{\partial\tilde{\tau}} + R_e\vec{P}\,T_{\tilde{n}} - J_m\vec{P}\,T_{\tilde{\tau}} = \Phi(L),$$

где $\tilde{n}$ – нормаль;
$\tilde{\tau}$ – касательная к контуру ;
$T_{\tilde{n}}$, $T_{\tilde{\tau}}$ – проекции вектора $\vec{T}$ на $\tilde{n}$ и $\tilde{\tau}$.

Полученное решение для $\zeta(x, y)$, т.е. $\vec{G}$, подставляем в (32), затем (32) – в (3I). Находим решение для b и в силу соотношения (28) отыскиваем новое постоянное значение A_z^1 . Процесс получения новых значений повторяется до установления, т.е. до шага r , на котором $A_z^r - A_z^{r+1} < \varepsilon$, где ε – наперед заданная точность. Скорости u, v и w находятся указанным выше способом.

Задача в описанной постановке несмотря на многие математические трудности, связанные с ее решением, в значительной мере удовлетворяет поставленным целям. Она позволяет решать задачи о распределении любых примесей в море в стационарных условиях, исследовать водообмен различных районов моря (например, Таганрогский залив с морем), "языки" опресненной воды у устьев рек и клина соленой воды, выходящей из пролива. Важно также и то, что в ходе решения задачи определяется значение A_z в зависимости от ветра и глубины моря. Это дает возможность при исследовании диффузии сбросных вод не прибегать к дополнительным расчетам A_z полуэмпирическими методами (Лагутин, Толмазин, 1965).

Литература

Альтман Э.Н. Исследования водообмена между Черным и Азовским морями. – "Сборник работ ЛЮМ ГОИН", 1972, вып.II, с.3-48.

Вагер Б.Г., Воробьев В.И., Лайхтман Д.М. Турбулентный режим мелководного водоема. – "Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1968, вып.IУ, № 9, с.988-993.

Лагутин Б.Л., Толмазин Д.М. О теоретическом решении проблемы искусственного регулирования водообмена через Керченский пролив. – "Метеорология и гидрология", 1965, № 4, с.18-21.

Монин А.С., Яглом А.м. Статистическая гидромеханика, ч.I, М, "Наука", 1965, с.325-327.

Симонов А.И., Гонтарев Н.П. Современный и перспективный водный и солевой баланс южных морей СССР. Раздел А. Азовское море. – "Труды ГОИН", 1972, вып.108, с.3-18.

Т о л м а з и н Д.М., Ш н а й д м а н В.А., А ц и х о в с к а я Ж.М. Проблемы динамики вод северо-западной части Черного моря. Киев, "Наукова думка", 1969, 120 с.

Ф е л ь з е н б а у м А.И. Динамика морских течений. - Сб. "Итоги науки". Гидромеханика, 1968, М., изд. ВИНИТИ, 1970, с.230-232.

To the dynamics of currents in the Azov Sea.

D.M.Tolmazin, A.L.Suvorovsky

S u m m a r y

A system of equations describing stationary currents in a basin of a homogeneous density and depth is investigated. Motion is induced by wind, springs and discharges. Coefficients of vertical turbulent mixing are assumed to be dependent upon the vertical coordinate. To find the vertical turbulent mixing the system of equations is added with a semi-empirical equation of turbulent kinetic energy balance. The solution to the problem comes to integrating an equation of the second order for exceeding the level and a system of algebraic ratios allowing for finding the rest functions. A model representing a closed basin with a flat bottom and uniform wind is considered in detail.

The final results of the solution to the system of hydrodynamical equations may be used for estimation of the distribution of sewage and industrial waters discharged into the Azov Sea, of marine water advection, water exchange between various areas of the Sea and so on.