

АКАДЕМИЯ НАУК УССР
МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Н. Н. АБРАЩИНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

(05I - геофизика)

Диссертация на русском языке

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических
наук

Севастополь 1972



АКАДЕМИЯ НАУК УССР
МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Н.Н. АБРАШИНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

(05I - геофизика)

Диссертация на русском языке

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических
наук



Севастополь 1972

Работа выполнена в Институте математики АН БССР

Научный руководитель – доктор физико-математических наук Л.В. ЧЕРКЕСОВ

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор С.С.ВОЙТ

кандидат физико-математических наук В.В.БЕЛИМОВ

Ведущее учреждение – Институт математики АН УССР.

Автореферат разослан " 14 апреля 1972 года

Защита диссертации состоится " " 6 мая 1972 года
на заседании Ученого Совета Морского гидрофизического института АН УССР (Севастополь ул. Ленина, 28).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Морского гидрофизического института АН УССР.

Ученый секретарь МГИ АН УССР
канд. физ.-мат. наук

И. Е. ТИМЧЕНКО

Теория поверхностных и внутренних волн в тяжелой несжимаемой жидкости является одним из разделов классической гидродинамики. Исторически основные направления развития теории волн были определены работами Стокса, Кельвина, Рэлея, Ламба, а в наше время работами Н.Б.Кочкина, Л.Н.Сретенского, Н.Н.Моисеева, Д.Д.Стокера, В.Крауса и других.

В последние годы возникшие возможности использования современных ЭВМ способствовали интенсивному ее развитию. Однако теория волн еще далека от завершения и привлекает внимание исследователей богатством ее приложений. Образование внутренних волн в морях и океанах связано с вертикальными градиентами плотности. Без учета внутренних волн нельзя быть уверенным в точности океанографических измерений. В силу этого изучение возникновения и развития внутренних волн является одной из актуальных задач современной океанографии.

Результаты исследования внутренних волн имеют также важное приложение в гидробиологии, в вопросах прогнозирования появления волн в определенном районе океана от циклонов, в вопросах подводного плавания, в гидрооптике, гидроакустике и т.д.

Теория установившихся поверхностных волн к настоящему времени довольно хорошо разработана. В меньшей мере изучены неустоявшиеся поверхностные волны и еще в меньшей мере --

неустановившиеся внутренние волны в жидкости, состоящей из слоев разной, но постоянной в каждом слое плотности.

Что же касается исследования внутренних волн в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью, то здесь к настоящему времени сделаны только первые шаги в изучении установившихся колебаний.

Предлагаемая работа посвящена теоретическому исследованию в линейной постановке неустановившихся поверхностных и внутренних волн в двухслойной идеальной жидкости, подвергающейся действию поверхностных возмущений, а также исследованию установившихся волновых движений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью, генерируемых периодическими по времени поверхностными давлениями.

Цель работы заключается в нахождении решений поставленных задач и исследовании полученных решений, позволяющем раскрыть картину поведения волн и выяснить влияние таких факторов, как скорость движения потока или возмущений, наличия слоев разной плотности, изменения рельефа дна, непрерывного изменения плотности с глубиной на возникновение внутренних волн.

При получении решений используется аппарат интегральных преобразований.

Работа состоит из введения и четырех глав.

Введение содержит краткое изложение содержания работы.

Первая глава посвящена исследованию в предположениях теории длинных волн процесса развития поверхностных и внутренних волн, возникающих от периодической перемещающейся системы поверхностных давлений вида $p(x, y, t) = f(x) \cos(ky - \sigma t)$, прикладываемых, начиная с момента времени $t=0$, к первоначаль-

но невозмущенной свободной поверхности двухслойной жидкости, заполняющей неограниченный бассейн конечной постоянной глубины. Учитывается действие силы Кориолиса.

Предшествующие работы, имеющие отношение к вопросу, рассматриваемому в данной главе, в основном посвящены исследованию установившихся волновых движений жидкости. К ним относятся работы Л.Н.Сретенского / 1934, 1935/ .

Первая из этих работ посвящена исследованию установившихся волн в двухслойной жидкости с бесконечно глубоким нижним слоем под действием импульса давлений. Во второй работе исследуется явление приливов в двухслойной жидкости.

В работе С.С.Войта / 1959 / рассмотрена задача об установившихся волновых движениях от периодической перемещающейся системы давлений в двухслойной жидкости с бесконечно глубоким нижним слоем.

Неустановившимся волновым движениям посвящены работы Л.В.Черкесова / 1962, 1965 / . В первой из них изучается процесс развития волн от периодической перемещающейся системы давлений в двухслойной жидкости, нижний слой которой имеет бесконечную глубину. Вторая работа посвящена решению задачи о волнах от периодических поверхностных возмущений в двухслойной жидкости конечной глубины.

Неустановившиеся волновые движения в однородной жидкости рассматривались в работах *J.J. Stoker* /1957 /, С.С.Войта /1957 / , Л.В.Черкесова /1959, 1961, 1963/ .

В первом параграфе первой главы задача о неустановившихся волнах, генерируемых периодической перемещающейся системой давлений в двухслойной жидкости конечной глубины, сведена мето-

дом, предложенным Л.Н.Сретенским /1935/, к двум задачам для однослойной жидкости. Получено аналитическое решение задачи.

Во втором параграфе этой главы проведен асимптотический анализ выражений вида свободной поверхности и поверхности раздела, полученных в § I. Найден вид незатухающих с расстоянием прогрессивных поверхностных и внутренних волн на некотором удалении от области возмущений. Найдены отношения амплитуд незатухающих поверхностных и внутренних волн. Исследовано влияние слоев разной плотности на амплитуды внутренних волн. Определены условия возникновения явления "мертвой воды".

На основе анализа полученных в этой главе результатов установлено, что на свободной поверхности возникает две системы прогрессивных волн ζ_1 , ζ_2 , на поверхности раздела - две системы волн ζ_3 , ζ_4 . Поверхностные волны ζ_1 при уменьшении глубины верхнего слоя жидкости переходят в волны, которые возникли бы на открытой поверхности однородной жидкости. Амплитуда поверхностных волн превосходит амплитуду этих же волн на поверхности раздела, а фазы их одинаковы. Внутренние волны ζ_4 , возникающие за счет неоднородности жидкости, имеют амплитуду, превосходящую амплитуду этих волн на свободной поверхности, а фазы их противоположны. Кроме того при определенных условиях амплитуда внутренних волн ζ_4 превосходит амплитуду поверхностных волн ζ_2 , передний фронт которых перемещается быстрее переднего фронта волн ζ_2 . Как показали численные расчеты, таблицы которых приведены в

данной главе, амплитуда волн h_4 может быть значительно (порядка 150 раз) больше амплитуды волн h_1 , причем это отношение существенным образом зависит от отношения глубин верхнего и нижнего слоев жидкости.

Найдены два критических значения частоты колебаний прикладываемых давлений σ_1 и σ_2 , как функции исходных параметров задачи. Установлено, что при $\sigma < \sigma_1$ незатухающих с расстоянием волн не возникает, а для $\sigma_2 < \sigma < \sigma_1$ при отсутствии волн на свободной поверхности на поверхности раздела возникают значительные внутренние волны (явление "мертвой воды"). Это явление может возникать и при условии $\sigma > \sigma_1$.

Как частный случай рассмотрена задача о волнах от поверхностных возмущений в однородной жидкости.

Во второй главе исследуются неустановившиеся поверхностные и внутренние волны в бассейне, глубина которого меняется резко, но непрерывно. В области резкого изменения глубины выполняются условия непрерывности возвышения свободной поверхности, поверхности раздела и потока жидкости. источником волн являются периодические по времени поверхностные давления

$p = p_0 \int(x, y) \cos \sigma t$, сосредоточенные в ограниченной области глубоководной части бассейна конечной глубины, заполненного двухслойной жидкостью.

Рассматриваются пространственная и плоская задачи.

Исследованиям, проводимым в этой главе, предшествовали работы, посвященные изучению установившихся свободных колебаний жидкости, заполняющей бассейн переменной глубины.

Из них работы *N. Zeilon* /1912/ , Т.Я.Секерж-Зенькович /1956/ , *M. J. Rattray* /1960/ содержат исследование

волн в двухслойной жидкости, работа /1959 / Т.Я.Секерж-Зенькович посвящена изучению поверхностных волн в канале переменной глубины, заполненном однородной жидкостью.

В данной главе в предположениях теории длинных волн с учетом действия силы Кориолиса получены выражения вида поверхностных и внутренних волн в глубоководной и мелководной областях и проведен подробный анализ поверхностных и внутренних волн в мелководной зоне.

Установлено, что на свободной поверхности и поверхности раздела в глубоководной области возникают по четыре системы прогрессивных волн, а в мелководной области на открытой поверхности и поверхности раздела - по две системы незатухающих прогрессивных волн.

Определены фазы и отношения амплитуд волн на свободной поверхности и поверхности раздела в мелководной области. Установлено, что от периодических давлений, прикладываемых к некоторой области свободной поверхности в глубоководной части бассейна переменной глубины, в любую точку мелководной области сначала придет первая поверхностная волна, амплитуда которой на поверхности раздела будет ослаблена по сравнению с амплитудой этой волны на свободной поверхности. Спустя некоторое время, в эту же точку придет вторая волна, амплитуда которой на поверхности раздела может быть во много раз больше амплитуды той же волны на открытой поверхности.

Определен промежуток времени между приходом первой и второй волн в фиксированную точку. Указаны границы областей открытых незатухающими волнами, определено время прихода передних фронтов волн.

Для выяснения отношений амплитуд поверхностных и внутренних волн были проведены численные расчеты, которые показали, что для реальных условий моря амплитуда внутренних волн может быть значительно (порядка 12 раз) больше амплитуды поверхностных волн. Это дает основание считать, что резкое изменение глубины моря при наличии скачка плотности жидкости может быть одной из причин возникновения значительных внутренних волн в мелководной области.

В двух предыдущих главах считалось, что в начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя.

Третья глава содержит исследование неустановившихся поверхностных и внутренних волн в двухслойной жидкости, текущей с постоянной скоростью U .

Генератором волн являются периодические по времени поверхностные возмущения.

Предшествующие работы посвящены изучению установившихся и неустановившихся волн в однородном однослойном потоке. К ним относятся работы *J. J. Stoker* / 1957 / , *Л. В. Черкесова* / 1962 / , *С. С. Войта* / 1963 / . Непосредственное отношение к данному вопросу имеет работа *P. Kaplan* / 1957 /.

Первый параграф третьей главы посвящен математической формулировке задачи о волнах в двухслойной жидкости, заполняющей бассейн конечной глубины, от поверхностных давлений вида

$p = a f(x) \cos \sigma t$, прикладываемых, начиная с момента времени $t = 0$, к ограниченной области свободной поверхности жидкости, и получению точного выражения вида поверхностных и внутренних волн.

Во втором параграфе этой главы найдены асимптотические формулы для определения возвышения свободной поверхности и поверхности раздела. Получен вид незатухающих с расстоянием прогрессивных волн, исследованы волны, бегущие как вверх, так и вниз по потоку. Найдены условия, при выполнении которых незатухающие волны вверх по потоку не распространяются. Исследована зависимость вида поверхностных и внутренних волн, а также характера их распространения вниз и вверх по потоку от скорости потока U и от параметров прикладываемых давлений. Отдельно исследованы случаи длинных и коротких волн. Найдены критические значения скорости потока U_1 , U_2 как функции параметров g , σ , U , ρ_1 , ρ_2 , h_1 , h_2 , где g - ускорение силы тяжести, ρ_1 , h_1 - соответственно плотность и глубина верхнего слоя потока жидкости, а ρ_2 , h_2 - плотность и глубина нижнего слоя, σ - частота колебаний прикладываемых давлений.

Установлено, что при $U > U_1$ незатухающие волны вверх по потоку не распространяются. В этом случае на свободной поверхности существуют две системы волн ζ_{11} и ζ_{12} , на поверхности раздела - две системы волн ζ_{21} , ζ_{22} причем каждая из систем ζ_{sj} ($s=1,2$; $j=1,2$) состоит из двух прогрессивных волн, бегущих вниз по потоку. Если скорость потока U больше критического значения скорости U_1 но меньше U_2 , то как ζ_{12} , так и ζ_{22} состоят из двух прогрессивных волн, бегущих вниз по потоку, а каждая из ζ_{s1} ($s=1,2$) состоит из четырех прогрессивных волн, причем две из них распространяются вверх по потоку. Когда U превосходит, U_2 то каждая из систем ζ_{sj} ($s=1,2$; $j=1,2$) состоит из

четырёх прогрессивных волн, из которых две волны распространяются вверх по потоку, а две — вниз по потоку.

Показано, что в случае коротких волн на поверхности раздела не возникает значительных внутренних волн, а в случае длинных волн амплитуды внутренних волн могут значительно превосходить амплитуды поверхностных волн. Для сравнения амплитуд поверхностных и внутренних длинных волн проведены численные расчеты.

Приведена таблица расчетов.

Как частный случай рассмотрена задача о волнах в однородном потоке.

Во всех предыдущих главах предполагалось, что в каждом слое плотность жидкости постоянна.

В главе четвертой исследуются волны в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. Источником волн являются периодические по времени поверхностные давления, прикладываемые к ограниченной области поверхности жидкости. Рассмотрены плоская и пространственная задачи.

В предшествующих работах, имеющих отношение к вопросу, рассматриваемому в данной главе, исследуются в основном свободные колебания в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. К ним относится работа *J. E. Fjeldstad* /1933/ о свободных колебаниях жидкости, плотность которой возрастает с глубиной по экспоненциальному закону, работы Б. А. Тареева /1963, 1966 / о свободных колебаниях жидкости постоянной плотности в верхнем слое и изменяющейся по закону $\rho(z) = \rho_0 + \Delta \rho [1 - \exp(-\beta z)]$ $0 \leq z < \infty$ в нижнем бесконечно глубоком слое, а также о свободных колебаниях жидкости постоянной плотности в верхнем

и нижнем слоях и изменяющейся по экспоненциальному закону в среднем слое без учета влияния дна и свободной поверхности. В работах *W. Krauss* /1966 / рассматриваются свободные колебания жидкости для подобных плотностных моделей, но с учетом влияния дна и свободной поверхности. Изучению собственных колебаний жидкости с непрерывно меняющейся плотностью посвящена работа *Г.И.Марчука, Б.А.Кагана* /1970 / . В нелинейной постановке свободные колебания жидкости рассмотрены в работах *А.М.Тер-Крикорова* /1962, 1965 / .

В первом параграфе четвертой главы получено решение задачи о волнах в жидкости конечной глубины от давлений вида

$$p = a f(x, y) \cos \sigma t$$
 в случае произвольного изменения плотности с глубиной.

В последнем параграфе исследуются внутренние волны, образующиеся в жидкости, плотность которой меняется по экспоненциальному закону $\rho_0(z) = \rho \exp(-kz)$ ($0 \leq z \leq h$)

При условии, что разность плотностей на дне и на свободной поверхности мала по сравнению со средним значением плотности, что имеет место в реальных условиях моря, проведен анализ вида волн на некотором удалении от очага возмущений. Этот сравнительно простой с точки зрения математических исследований и вместе с тем при $kh \ll 1$ с высокой степенью точности аппроксимирующий линейное изменение плотности с глубиной, случай позволяет провести исследование влияния вертикального изменения плотности на длину, амплитуду волн и на изменение поля скоростей жидкости с глубиной.

Установлено, что поведение вертикальной составляющей скорости существенно зависит от соотношения следующих параме-

тров: частоты колебаний поверхностных давлений σ , разности плотностей на свободной поверхности и на дне, параметра Кориолиса ω .

Установлено четыре характерных случая соотношения этих параметров: I) $\sigma^2 < 4\omega^2$, $\sigma^2 < gk$; II) $\sigma^2 > 4\omega^2$, $\sigma^2 > gk$; III) $4\omega^2 < \sigma^2 < gk$; IV) $4\omega^2 > \sigma^2 > gk$.

Показано, что в первом случае незатухающих с расстоянием волн не возникает. Во втором случае существуют прогрессивные поверхностные волны, а внутренние волны не возникают. При этом влияние изменения плотности сводится к некоторой деформации амплитуды скорости и длины волны.

В третьем и четвертом случаях свободная поверхность представляет собою сумму счетного множества прогрессивных волн, скорости U_n и длины λ_n , которых убывают с ростом n , где $n = 0, 1, 2, \dots$ в случае III и $n = 1, 2, \dots$ в случае IV.

Первая гармоника ξ_0 представляет по своему характеру поверхностную волну, амплитуда которой монотонно затухает с глубиной по закону близкому к линейному для малых значений $\xi = k/h$. В случае IV эта гармоника отсутствует. Каждая последующая гармоника представляет собою типичную внутреннюю волну, амплитуда которой незначительна на свободной поверхности и достигает максимума внутри жидкости.

Так как возвышение свободной поверхности ξ и вертикальная составляющая скорости w представляют собою бесконечную сумму движущихся гармонических волн различных амплитуд и длин, то в общем случае не представляется возможным проанализировать зависимость w от z и t даже в фиксированной точке.

Для выяснения этой зависимости были проведены численные расчеты. Вычислялась вертикальная составляющая скорости

$$W = \sum_{n=0}^N W_n \quad \text{в III случае и} \quad W = \sum_{n=1}^N W_n \quad \text{в IV случае.}$$

Расчеты показали, что w_0 с ошибкой порядка ϵ (по сравнению с единицей) в определении амплитуды и длины волны представляют собою w для однородной жидкости, поэтому

$w_{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$ представляет собою "добавок" к вертикальной скорости за счет неоднородности жидкости. Результаты расчетов приведены в виде графиков, характеризующих распределение w по глубине в различные моменты времени, а также зависимость амплитуды $\max w$ от z за период T ($T = 2\pi\sigma^{-1}$) в целом.

Анализ численных расчетов показал, что w как функция z дважды достигает максимума, причем слой жидкости, вовлекаемые в движение со скоростями, превосходящими скорости на свободной поверхности, находятся в окрестности середины глубины жидкости. Максимальные значения вертикальной составляющей скорости в случае III значительно (от 2 до 100 раз в зависимости от выбранных параметров) превосходят значения w на свободной поверхности и в 3,5 и больше раз превосходят значения вертикальной составляющей скорости на той же глубине в однородной жидкости. В случае IV также могут иметь место значительные внутренние волны.

В однородной жидкости вертикальные скорости, амплитуда которых превышает половину амплитуды w на свободной поверхности, занимает слой толщиной $0,5 h$, а в неоднородной жидкости толщина этого слоя равна $0,8 h$, при этом от глубины $0,5 h$ и до самого дна амплитуда w в неоднородной жидкости по

крайней мере в 3 раза больше амплитуды ω в однородной жидкости.

Установлено, таким образом, что неоднородность жидкости приводит к усилению обменных процессов не только в слоях, расположенных в окрестности середины глубины, но и в придонной области.

Отдельные результаты, полученные в диссертации, докладывались на Второй и Третьей республиканских конференциях математиков Белоруссии (Минск, 1967, 1971 г.), на конференциях молодых ученых (Минск, 1966 г., 1968 г.), на семинарах в лаборатории математической физики Института математики АН БССР, в лаборатории теории волн Морского гидрофизического института АН УССР и изложены в нижеприведенных работах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черкесов Д.В.
Абрашина Н.Н. Неустановившиеся волны от периодических давлений в жидкости конечной глубины. ДАН БССР, т.УП, № 9, 1963.
2. Абрашина Н.Н. Развитие волн на поверхности потока под действием периодических давлений в жидкости конечной глубины. ДАН БССР, т.УШ, № 8, 1964.
3. Абрашина Н.Н. Длинные волны в неоднородной жидкости от периодической перемещающейся системы давлений. Изв. АН СССР "ФА и О", т.Ц, № 2, 1966.
4. Абрашина Н.Н. Длинные волны от периодических давлений в неоднородной жидкости переменной глубины (плоская задача). Конференция молодых ученых. Тезисы докладов. Минск, 1966.
5. Абрашина Н.Н. Длинные волны от периодических давлений в неоднородной жидкости переменной глубины. Изв. АН СССР "ФА и О" т.Ш, № II, 1967.
6. Абрашина Н.Н. Волны от периодических давлений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью (плоская задача). Вторая республиканская конференция математиков Белоруссии. Тезисы докладов. Минск, 1967.
7. Абрашина Н.Н. Волны от периодических давлений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью (плоская

- задача). Труды II республиканской конференции математиков Белоруссии, Минск, 1969.
8. Абрашина Н.Н. Черкесов Л.В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. Морские гидрофизические исследования, № 2 (48), 1970.
9. Абрашина Н.Н. Неустановившиеся волны в стратифицированном море от периодических движущихся возмущений. Морские гидрофизические исследования, № 3 (53), 1971.
10. Абрашина Н.Н. Неустановившиеся волны в двухслойном потоке. Третья республиканская конференция математиков Белоруссии. Тезисы докладов. Минск, 1971.

АТ 11225 Подписано к печати 13.IV.1972
Формат 60x90¹/₁₆. Объем 1,25 физ.печ.листов
Заказ 53 Тираж 150 экз.
Отпечатано на ротапринтере Института математики
АН БССР, г.Минск, Типографская, 11.



