

На правах рукописи

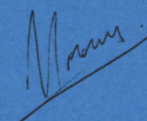
Ильин Олег Игоревич

**ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЯХ
ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ ПОПУЛЯЦИЙ С ВОЗРАСТНОЙ
СТРУКТУРОЙ**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Петропавловск-Камчатский
2009

Работа выполнена в лаборатории морских промысловых рыб Камчатского научно-исследовательского института рыбного хозяйства и океанографии (ФГУП «КамчатНИРО»).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Абакумов Александр Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Ащепков Леонид Тимофеевич

кандидат биологических наук
Лескова Ольга Алексеевна

Ведущая организация: Институт комплексного анализа
региональных проблем ДВО РАН,
г.Биробиджан

Защита состоится « 15 » октября 2009 года в 12⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.092.03 при Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете (ГОУВПО «КнАГ-ТУ») по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУВПО «КнАГ-ТУ».

Автореферат разослан « 1 » сентября 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

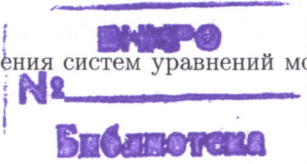
Зарубин М.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из основных проблем экологии является проблема рационального использования биологических ресурсов. Задачи рационального использования биологических популяций приводят к задачам оптимального управления. Оптимальное управление предусматривает выбор такого воздействия на объект управления (биологическую популяцию), которое доставляло бы максимум некоторому функционалу, выражающему пользу для человека — в простейшем случае это может быть доход от вылова рыбы за заданный промежуток времени. Промысловое воздействие вызывает не только количественные, но и качественные изменения в эксплуатируемой популяции. Кроме того, особи разного возраста обладают различными характеристиками размножения и гибели и вносят различный вклад в пополнение популяции. Наконец, многие экономические характеристики особей, такие как масса, плодовитость и т.д., в большой степени зависят от их возраста. В этой связи особи разного возраста могут вносить различный вклад в оптимизируемый функционал. Для понимания механизмов функционирования и решения вопросов рационального использования биологических популяций необходимо построение математической модели, позволяющей получить детальное описание динамики возрастного состава изучаемого вида. Такой моделью может служить непрерывная модель динамики возрастной структуры биологической популяции. Традиционно при решении задач оптимальной эксплуатации в моделях такого типа ограничиваются исследованием задачи оптимизации равновесного улова. Однако, нужды практики требуют решения задач оптимальной эксплуатации в динамике, в том числе при условии поддержания популяции на достаточно высоком уровне продуктивности в течение всего периода эксплуатации. Исследование указанных задач актуально не только с практической, но и с теоретической точек зрения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач оптимального управления биологическими ресурсами в рамках модели эксплуатируемой популяции с непрерывными временем и возрастом. Для достижения этой цели решаются следующие задачи.

1. Выяснение условий существования и единственности решения системы уравнений модели биологической популяции с непрерывными временем и возрастом.
2. Установление необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления.
3. Построение алгоритмов численного решения систем уравнений моделей и задач оптимизации.



4. Реализация полученных результатов на примерах запасов трески юго-западной части Берингова моря и восточноооходоморского минтая.

Методы исследования базируются на математическом аппарате теории оптимальных процессов, дифференциальных уравнений в частных производных, численных методов оптимизации.

Предметом исследования являются математические модели эксплуатируемых биологических популяций с непрерывными временем и возрастом.

Научная новизна, полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Выяснены условия однозначной разрешимости системы уравнений непрерывной модели популяции с возрастной структурой.
2. Установлены необходимые условия оптимальности в задачах оптимальной эксплуатации популяций с возрастной структурой и их сообществ.
3. Осуществлено построение алгоритмов численного решения систем уравнений и задач оптимизации в непрерывных моделях биологических популяций с возрастной структурой и их сообществ.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

На защиту выносятся:

1. Для серии задач оптимального управления в непрерывных моделях популяций с возрастной структурой установлены необходимые условия оптимальности управления, построены вычислительные алгоритмы и проведено численное исследование на примерах запасов дальневосточных рыб.

Научная и практическая значимость работы. Результаты проведенного исследования могут служить основой при оценивании состояния запасов и прогнозировании оптимальной величины изъятия морских промысловых организмов.

Достоверность научных положений и выводов, полученных в работе, является следствием использования классических математических методов построения моделей и их анализа: методов оптимизации, оптимального управления; методов численного анализа.

Апробация результатов работы. Результаты, полученные в рамках диссертационной работы, докладывались и обсуждались на Дальневосточной математической школе-семинаре имени Е.В. Золотова (Владивосток, 2007), на семинарах «Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях биоресурсов Мирового океана»

(Владивосток, ТИНРО-центр, 2003, 2007), на отчётных сессиях КамчатНИРО (Петропавловск-Камчатский, 2006, 2008) и ТИНРО-центра (Владивосток, ТИНРО-центр, 2005).

Личный вклад автора: Все основные результаты и выводы диссертационной работы получены автором самостоятельно.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, из них 2 статьи в ведущих рецензируемых журналах. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы и приложений. Содержание работы изложено на 183 страницах, список литературы включает 158 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы выносимые на защиту основные положения диссертации.

В первом разделе приводится обзор основных результатов и перечень основных направлений исследований, смежных по отношению к настоящей работе, и указывается место, которое она тематически среди них занимает. Первые работы в области управления биологическими популяциями появились в начале 70-х годов прошлого века (Уатт, 1971; Свиричев, Елизаров, 1972). Задачи оптимального управления для моделей популяций можно разделить на 4 типа по признакам дискретности или непрерывности и учета или неучета внутрипопуляционных структур. Задачи оптимального сбора урожая в моделях однородных популяций достаточно хорошо изучены, как в непрерывной (Clark, 1985; Абакумов, 1987), так и в дискретной (Абакумов, 1980) постановках. При построении оптимального управления в непрерывном случае используется принцип максимума Понтрягина (Понтрягин и др., 1961), в дискретном случае — принцип оптимальности Беллмана (Беллман, 1960). Учёт возрастной структуры в дискретном случае приводит к матричной модели Лесли (Leslie, 1945). Задачи оптимальной эксплуатации популяции с возрастной структурой в дискретной постановке исследовались в работах различных авторов (Rogges, Fair, 1975; Домбровский, 1979; Абакумов, 1979). Их решение строится по схеме динамического программирования. В непрерывной постановке эта задача изучалась в ряде работ (Свиричев, Тимофеев, 1980; Абакумов, Проценко, 1991) при значительных упрощениях и только в стационарном случае.

Второй раздел посвящён моделям биологических популяций и сообществ с непрерывными временем и возрастом.

В подпункте 2.1.1 традиционно выводятся уравнения модели популяции с возрастной структурой (Динамическая теория..., 1974):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} &= r(t, \tau)x(t, \tau) - u(t, \tau)x(t, \tau), \quad (t, \tau) \in G = [0; T] \times [0; \hat{\tau}], \\ x(0, \tau) &= x_0(\tau), \quad \tau \in [0; \hat{\tau}]; \quad x(t, 0) = \Phi(s), \quad s = \int_0^{\hat{\tau}} \alpha(t, \tau)x(t, \tau) d\tau, \quad t \in [0; T]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, τ — возраст особей, $x(t, \tau)$ — плотность численности (биомассы) популяции, $u(t, \tau)$ — интенсивность промысла, функция $r(t, \tau)$ описывает процессы роста и смертности. Функция рождаемости $\alpha(t, \tau) \geq 0$ характеризует долю особей, готовых к размножению, интеграл s выражает численность (биомассу) родителей. Первое уравнение в (1) называется уравнением выживаемости, а внутреннекраевое условие — уравнением рождаемости. Процессы, происходящие на ранних стадиях жизненного цикла, оказываются «защитыми» внутри функции Φ , $\Phi(s) \geq 0$, $\Phi(0) = 0$. Функция Φ определена, ограничена, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию Липшица по s на R_+ . Этим условиям удовлетворяют большинство функций, описывающих процессы воспроизводства (Hilborn and Walters, 1992; Максименко, Антонов, 2003). Начальное распределение численности (биомассы) задано функцией $x_0(\tau)$. Задачи типа (1) при $\Phi(s)=s$ подробно рассмотрены в работах (Динамическая теория..., 1974; Sinko and Streifer, 1967; Banks et al., 1991).

В подпункте 2.1.2 доказывается теорема об однозначной разрешимости системы уравнений динамики возрастной структуры популяции.

Теорема 2.1 Пусть в задаче (1) $\alpha(t, \tau)$, $r(t, \tau)$, $u(t, \tau)$ — кусочно-непрерывные на множестве G функции, $x_0(\tau) \in C([0, \hat{\tau}])$, функция $\Phi(s)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по s на R_+ . Пусть, кроме того, выполнено условие согласования:

$$x_0(0) = \Phi\left(\int_0^{\hat{\tau}} \alpha(0, \tau) \cdot x_0(\tau) d\tau\right). \quad (2)$$

Тогда решение $x(t, \tau) \in C(G)$ краевой задачи (1) существует и единственно.

В этом же подпункте доказывается существование и единственность решения сопряженной задачи, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= f(t, \tau)\psi(t, \tau) - h(t, \tau)\psi(t, 0), \quad (t, \tau) \in G = [0; T] \times [0; \hat{\tau}], \\ \psi(T, \tau) &= a(\tau), \quad \tau \in [0; \hat{\tau}]; \quad \psi(t, \hat{\tau}) = b(t), \quad t \in [0; T]. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема 2.2 Пусть f, h, α — кусочно-непрерывные на G функции, $a(\tau) \in C([0, \hat{\tau}])$, $b(t) \in C([0, T])$. Кроме того, предполагается, что выполнено условие согласования:

$$a(\hat{\tau}) = b(T). \quad (4)$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (3) в классе непрерывных на G функций.

В подпункте 2.2.1 нами выводится система уравнений модели сообщества биологических популяций с возрастной структурой. Предложенная модель учитывает внутри- и межвидовые конкурентные взаимоотношения и отношения «хищник-жертва» и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau} &= \left(r_i(\tau) - \sum_{k=1}^n \int_0^{\hat{\tau}} \chi_{ik}(\tau, \xi)x_k(t, \xi)d\xi \right) \cdot x_i(t, \tau), \\ x_i(t, 0) &= \int_0^{\hat{\tau}} \alpha_i(t, \tau) \cdot x_i(t, \tau) d\tau, \quad x_i(0, \tau) = x_{i0}(\tau), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\chi_{jk}^i(\tau, \xi)$ характеризуют взаимоотношения между особями i -го вида в возрасте τ и особями j -го вида в возрасте ξ . Вывод уравнений системы опирается на понятия спектра ресурса, конкуренции, экологической ниши.

Третий раздел посвящён задачам оптимизации.

В подпункте 3.1.1 исследуется общая задача оптимальной эксплуатации (ОЭ) для популяции. Уравнения динамики возрастной структуры популяции, находящейся под воздействием промысла, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} &= f(t, \tau, x) - ux; \\ x(0, \tau) &= x_0(\tau); \quad x(t, 0) = \Phi(s), \quad s = \int_0^{\hat{\tau}} \alpha(t, \tau)x(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь интенсивность промысла $u(t, \tau)$ является управляющим воздействием. Пусть $F_0(t, \tau, x, u)$ — заданная функция, характеризующая доход от изъятия особей с возрастом τ в момент времени t . В этой задаче нас не интересует, каким образом на практике будет реализовываться интенсивность промысла. Задача ОЭ состоит в том, чтобы найти такую интенсивность промысла $u(t, \tau)$, которая при условиях (5) доставляет максимум функционалу дохода от изъятия особей с возрастом от 0 до $\hat{\tau}$ за период времени от 0 до T :

$$F = \int_0^T \int_0^{\hat{\tau}} F_0(t, \tau, x, u) dt d\tau \rightarrow \sup, \quad (6)$$

или, что то же самое, минимум функционалу

$$I = - \int_0^T \int_0^{\hat{\tau}} F_0(t, \tau, x, u) dt d\tau \rightarrow \inf. \quad (7)$$

При этом на управляющее воздействие $u(t, \tau)$ наложено ограничение:

$$u \in D, D = \{u: 0 \leq u(t, \tau) \leq U\}, U = \text{Const}. \quad (8)$$

Оптимальное управление $u(t, \tau)$ ищется в классе кусочно-непрерывных на G функций с конечным числом линий разрыва и со значениями из области D . Управления, удовлетворяющие указанным условиям, считаются допустимыми. Предполагается, что для любого заданного допустимого управления задача (5) имеет единственное непрерывное решение. Для случая $f = rx$ это доказано в подпункте 2.1.2. Составим гамильтониан:

$$H(t, \tau, x, \psi, u) = F_0 + \psi(f - ux) + \psi(t, 0) \frac{d\Phi(s)}{ds} \alpha x. \quad (9)$$

Здесь функция $\psi = \psi(t, \tau)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = - \frac{\partial f}{\partial x} \psi + \psi u - \frac{\partial F_0}{\partial x} - \psi(t, 0) \frac{d\Phi}{ds} \alpha; \psi(T, \tau) = 0, \psi(t, \hat{\tau}) = 0. \quad (10)$$

Будем говорить, что допустимое управление $u(t, \tau)$ удовлетворяет условию максимума, если

$$H(t, \tau, x(t, \tau), \psi(t, \tau), u(t, \tau)) = \max_{0 \leq v \leq U} H(t, \tau, x(t, \tau), \psi(t, \tau), v), \quad (11)$$

где x, ψ — решение краевой задачи (5), (10), соответствующее управлению $u(t, \tau)$.

Теорема 3.1. Пусть функции α, x_0 удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и, кроме того, $f(t, \tau, x), \Phi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x при $x \in [0, +\infty)$, функция $F_0(t, \tau, x, u)$ кусочно-непрерывна на G по первым двум аргументам и дважды непрерывно дифференцируема по x, u при $x \in [0, +\infty)$ и всех $u \in [0, U]$. Тогда если управление $u(t, \tau)$ доставляет минимум функционалу (7), то оно удовлетворяет условию максимума.

Если оптимальное управление $u(t, \tau)$ в задаче (5), (7), (8) существует, то оно определяется из условия максимума (11). В частном случае

$$F_0(t, \tau, x, u) = c(t, \tau) \cdot u(t, \tau) \cdot x(t, \tau), \quad (12)$$

где $c(t, \tau)$ — кусочно-непрерывная на G функция, описывающая стоимость особей, оптимальное управление имеет вид:

$$u(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \psi(t, \tau) > c(t, \tau), \\ \text{произвольное } v(t, \tau), & 0 \leq v \leq U, \psi(t, \tau) = c(t, \tau), \\ U, & \psi(t, \tau) < c(t, \tau). \end{cases} \quad (13)$$

В подпункте 3.1.2 изучается задача ОЭ популяции в равновесном режиме. Уравнение стационарного распределения биомассы имеет вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = r(\tau)x - u(\tau)x, \tau \in [0; \hat{\tau}]; x(0) = \Phi(s), s = \int_0^{\hat{\tau}} \alpha(\tau)x(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Требуется найти такую интенсивность промысла $u(\tau)$, которая при условиях (14) доставляет наибольшее значение функционалу дохода от уравновешенного улова

$$F = \int_0^{\hat{\tau}} c(\tau) \cdot u(\tau) \cdot x(\tau) d\tau \rightarrow \sup \quad (15)$$

при условии

$$0 \leq u(\tau) \leq U. \quad (16)$$

Алгоритм решения задачи ОЭ популяции в равновесном режиме для случая $\Phi(s) = s$ приведен в работе А.И. Абакумова и Т.А. Проценко (Абакумов, Проценко, 1990).

Задача оптимальной эксплуатации в равновесии сводится к стандартной задаче оптимального управления с подвижными концами. Из принципа максимума Л.С. Понтрягина (Понтрягин и др., 1961) следует, что оптимальное управление $u^*(\tau)$ в задаче (14)-(16) определяется из условия максимума гамильтониана

$$H = (r - u)x\psi - \alpha x\lambda + cux = r\psi x + (c - \psi)ux - \alpha x\lambda$$

и выражается формулой:

$$u^*(\tau) = \arg \max_{0 \leq u \leq U} H = \begin{cases} 0, & \psi(\tau) > c(\tau), \\ \text{произвольное } v(\tau), & 0 \leq v(\tau) \leq U, \psi(\tau) = c(\tau), \\ U, & \psi(\tau) < c(\tau). \end{cases} \quad (17)$$

Здесь функции ψ, λ есть решение сопряженной системы:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = (u - r)\psi - cu + \alpha\lambda, \psi(\hat{\tau}) = 0; \frac{d\lambda}{d\tau} = 0, \lambda(0) = -\psi(0) \frac{d\Phi}{ds}. \quad (18)$$

В подпункте 3.1.3 рассматривается задача ОЭ с заданной функцией улавливаемости. Вид интенсивности промысла конкретизируется: $u(t, \tau) = q(\tau)v(t)$, где функция $q(\tau) \in C([0, \hat{\tau}])$ характеризует возрастную улавливаемость (Засосов, 1976), а $v(t)$ — интенсивность промышленного усилия. Здесь, в отличие от задачи (5), (7), (8), имеется реальное орудие лова, характеристики которого определяются функцией улавливаемости $q(\tau)$, а управление осуществляется через интенсивность промышленного усилия $v(t)$, например, количество промысловых операций в

единицу времени. Задача ОЭ с заданной функцией улавливаемости приобретает вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} = f(t, \tau, x) - q(\tau)v(t)x; \quad x(0, \tau) = x_0(\tau); \quad x(t, 0) = \Phi(s). \quad (19)$$

$$I = - \int_0^T \int_0^{\hat{\tau}} F_0(t, \tau, x, v) dt d\tau \rightarrow \inf, \quad (20)$$

$$0 \leq v(t) \leq V. \quad (21)$$

Функция F_0 характеризует доход от изъятия особей с возрастом τ в момент времени t . Допустимыми считаются кусочно-непрерывные управления $v(t)$ с конечным числом точек разрыва на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющие условию (21). Гамильтониан задачи (19)-(21) имеет вид (9), где $u = qv$. Будем говорить, что допустимое управление $v(t)$ удовлетворяет условию максимума, если

$$\int_0^{\hat{\tau}} H(t, \tau, x(t, \tau), \psi(t, \tau), v(t)) dt = \max_{0 \leq w \leq V} \int_0^{\hat{\tau}} H(t, \tau, x(t, \tau), \psi(t, \tau), w) dt, \quad (22)$$

где x, ψ — решение краевой задачи (19),(10), соответствующее управлению $v(t)$.

Теорема 3.2. Пусть функции α, x_0 удовлетворяют условиям теоремы 2.1, функции $f(t, \tau, x)$ и $\Phi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x при $x \in [0, +\infty)$, функция $F_0(t, \tau, x, v)$ кусочно-непрерывна на G по первым двум аргументам и дважды непрерывно дифференцируема по x, v при $x \in [0, +\infty)$ и всех $v \in [0, V]$. Тогда если управление $v(t)$ доставляет минимум функционалу (20), то оно удовлетворяет условию максимума (22).

В частном случае $F_0(t, \tau, x, v) = c(\tau)q(\tau)v(t)x(t, \tau)$, где $c(\tau)$ — заданная кусочно-непрерывная функция, оптимальное управление имеет вид:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \int_0^{\hat{\tau}} q(\tau) \cdot (\psi(t, \tau) - c(\tau)) \cdot x(t, \tau) d\tau > 0, \\ \text{произвольное } w(t), & 0 \leq w(t) \leq V, \int_0^{\hat{\tau}} q(\psi - c)x d\tau = 0, \\ V, & \int_0^{\hat{\tau}} q(\psi - c)x d\tau < 0. \end{cases} \quad (23)$$

В подпункте 3.1.4. рассматривается задача ОЭ популяции с возрастной структурой при наличии функциональных ограничений. Из формул (13), (23) следует, что в задачах (5), (7), (8) и (19)-(21) на неко-

тором заключительном отрезке времени $[t', T]$, $0 \leq t' < T$ вся популяция облавливается с максимальной интенсивностью $u(t, \tau) = U$. В реальных условиях использование такой стратегии промысла может привести к снижению численности (биомассы) родителей ниже некоторого критического уровня S_0 , за которым возрастает вероятность появления неурожайных поколений. Последствиями этого могут быть продолжительная депрессия популяции и утрата ею промыслового значения, что недопустимо. Необходимо поддержание популяции на достаточно высоком уровне продуктивности в течение всего периода эксплуатации. По этой причине привлекаются функциональные ограничения

$$S_{0k} - \int_0^{\hat{\tau}} \beta_k(\tau)x(t_k, \tau) d\tau \leq 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad 0 < t_1 < \dots < t_N \leq T. \quad (24)$$

Здесь $\beta_k(\tau)$, $k = 1, \dots, N$ — кусочно-непрерывные на $[0; T]$ функции. В частности, при $\beta_k(\tau) \equiv \alpha(t_k, \tau)$ получаем ограничения снизу на численность (биомассу) производителей популяции, при $\beta_k(\tau) \equiv 1$ — ограничения на общую численность. Моменты времени t_k соответствуют началу календарного года или сроков нереста. Рассмотрен случай $u(t, \tau) = q(\tau)v(t)$, где $q(\tau)$ — заданная функция улавливаемости. Задача ОЭ популяции с возрастной структурой при наличии функциональных ограничений принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} &= f(t, \tau, x) - q(\tau)v(t)x(t, \tau); \\ x(0, \tau) &= x_0(\tau), \quad x(t, 0) = \Phi(s), \quad s = \int_0^{\hat{\tau}} \alpha(t, \tau)x(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

$$I = - \int_0^T \int_0^{\hat{\tau}} F_0(t, \tau, x, v) dt d\tau \rightarrow \inf, \quad (26)$$

$$I_k = S_{0k} - \int_0^{\hat{\tau}} \int_0^T \beta_k(\tau)x(t, \tau)\delta(t - t_k) dt d\tau \leq 0, \quad (27)$$

$$k = 1, \dots, N, \quad 0 < t_1 < \dots < t_N \leq T,$$

$$0 \leq v(t) \leq U. \quad (28)$$

В формуле (27) $\delta(t - t_k)$ — дельта-функция Дирака.

Оптимальное управление $v(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных на $[0; T]$ функций с конечным числом точек разрыва и со значениями, удовлетворяющими условию (28). Функции f, Φ, F_0 удовлетворяют условиям теоремы 3.2 из подпункта 3.1.3. Предполагается, что для любого допустимого управления задача (25) имеет единственное непрерывное

решение. Нами показано, что если допустимое управление является решением задачи (25)-(28), то с точностью до величин второго порядка выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \Delta I_0 &= \iint_G (\psi_0 \cdot x \cdot q \cdot \Delta v - \Delta_v F_0) d\tau \geq 0, \\ I_k + \Delta I_k &= I_k + \iint_G \psi_k \cdot x \cdot q \cdot \Delta v dt d\tau \leq 0, k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (29)$$

где $\psi_0, \mu_0, \psi_k, \mu_k$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \psi_0 + \psi_0 q v - \frac{\partial F_0}{\partial x} - \mu_0 \alpha, \quad \psi_0(T, \tau) = 0, \quad \psi_0(t, \hat{\tau}) = 0; \\ \frac{\partial \mu_0}{\partial \tau} &= 0, \quad \mu_0(t, \hat{\tau}) = \psi_0(t, 0) \cdot \frac{d\Phi(y(t, \hat{\tau}))}{dy(t, \hat{\tau})}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \psi_k + \psi_k q v - \beta_k \delta(t - t_k) - \mu_k \alpha, \quad \psi_k(T, \tau) = 0, \quad \psi_k(t, \hat{\tau}) = 0; \\ \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau} &= 0, \quad \mu_k(t, \hat{\tau}) = \psi_k(t, 0) \cdot \frac{d\Phi(y(t, \hat{\tau}))}{dy(t, \hat{\tau})}. \end{aligned} \quad (31)$$

В подпункте 3.2.1 исследуется общая задача ОЭ биологического сообщества популяций с возрастной структурой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau} &= f_i(t, \tau, x_1, \dots, x_n, \int_0^{\hat{\tau}} \chi_{i1}^j(\tau, \xi) x_1(t, \xi) d\xi, \dots \\ \dots, \int_0^{\hat{\tau}} \chi_{nm}^i(\tau, \xi) x_n(t, \xi) d\xi) - u_i(t, \tau) x_i(t, \tau), \quad (t, \tau) \in G = [0; T] \times [0; \hat{\tau}]; \\ x_i(0, \tau) &= x_{i0}(\tau), \quad \tau \in [0, \hat{\tau}]; \quad x_i(t, 0) = \int_0^{\hat{\tau}} \alpha_i(t, \xi) x_i(t, \xi) d\xi, \quad t \in [0; T]; \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (32)$$

$$I = -F = -\int_0^T \int_0^{\hat{\tau}} \sum_{i=1}^n F_{0i}(t, \tau, u_i, x_i) dt d\tau \rightarrow \inf, \quad (33)$$

$$\vec{u} \in D, \quad D = \{\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) : 0 \leq u_i(t, \tau) \leq U_i, \quad i = 1, \dots, n\}. \quad (34)$$

Здесь функции $u_i(t, \tau)$ — управляющие воздействия, характеризующие интенсивность изъятия из сообщества особей i -го вида с возрастом τ в момент времени t , коэффициенты χ_{ik} описывают внутри- и межвидовые взаимоотношения. Функции $\alpha_i(t, \tau)$, $i = 1, \dots, n$ кусочно-непрерывны на G , функции $\chi_{ik}^j(\tau, \xi)$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m_i$ кусочно-непрерывны на множестве $\{\tau \in [0; \hat{\tau}], \xi \in [0; \hat{\tau}]\}$, и $x_{i0}(\tau) \in C[0, \hat{\tau}]$, $i = 1, \dots, n$. Функции $f_i(t, \tau, x_1, \dots, x_n, J_{11}^i, \dots, J_{nm}^i)$, $i = 1, \dots, n$ непрерывны по

$t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \hat{\tau}]$ и дважды непрерывно дифференцируемы по остальным аргументам при $x_i \in [0, +\infty)$, $J_{ik}^j \in (-\infty, +\infty)$, $\forall i, j, k$, а функции F_{0i} , $i = 1, \dots, n$, характеризующие доход от изъятия i -го вида в сообществе — непрерывны в области G по первым двум аргументам и дважды непрерывно дифференцируемы по остальным аргументам при $\vec{x}, \vec{u} \in R_+^n$. Функционал (33) выражает с точностью до знака доход от промысла в сообществе.

Допустимые управления $\vec{u}(t, \tau) = (u_1(t, \tau), \dots, u_n(t, \tau))$ принадлежат классу кусочно-непрерывных на G вектор-функций с конечным числом линий разрыва и со значениями из области D . Предполагается, что для любого заданного допустимого управления задача (32) имеет единственное непрерывное решение. Обозначим для краткости

$$J_{ik}^j = J_{ik}^j(t, \tau) = \int_0^{\hat{\tau}} \chi_{ik}^j(\tau, \xi) \cdot x_i(t, \xi) d\xi, \quad \Delta J_{ik}^j = \int_0^{\hat{\tau}} \chi_{ik}^j(\tau, \xi) \cdot \Delta x_i(t, \xi) d\xi.$$

Гамильтониан задачи имеет вид:

$$H(t, \tau, \vec{x}(t, \tau), \vec{\psi}(t, \tau), \vec{u}(t, \tau)) = \sum_{i=1}^n [F_{0i} + \psi_i(f_i - u_i x_i) + \psi_i(t, 0) \alpha_i x_i].$$

Здесь функции ψ_i , $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau} &= -\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j \right) + \psi_i u_i - \frac{\partial F_0}{\partial x_i} - \psi_i(t, 0) \alpha_i - \\ &- \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \int_0^{\hat{\tau}} \psi_j(t, \xi) \frac{\partial f_j(t, \xi, \dots)}{\partial J_{ik}^j} \chi_{ik}^j(\xi, \tau) d\xi, \quad \psi_i(T, \tau) = 0, \quad \psi_i(t, \hat{\tau}) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Допустимое управление $\vec{u}(t, \tau)$ удовлетворяет условию максимума, если

$$H(t, \tau, \vec{x}(t, \tau), \vec{\psi}(t, \tau), \vec{u}(t, \tau)) = \max_{\vec{v} \in D} H(t, \tau, \vec{x}(t, \tau), \vec{\psi}(t, \tau), \vec{v}), \quad (36)$$

где $\vec{x}, \vec{\psi}$ — решение задач (32), (35), соответствующее управлению $\vec{u}(t, \tau)$.

Теорема 3.3 Если управление $\vec{u}(t, \tau)$ доставляет минимум функционалу (33), то оно удовлетворяет условию максимума (36).

В подпункте 3.2.2 рассматривается задача ОЭ биологического сообщества популяций с возрастной структурой в равновесном режиме. Пусть в системе уравнений (32) функции f_i, α_i, u_i не зависят от времени. Стационарное распределение численностей популяций в сообществе, если оно существует, описывается системой уравнений:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f_i(\tau, x_1, \dots, \int_0^{\hat{\tau}} \chi_{nm}^i(\tau, \xi) x_n(\xi) d\xi) - u_i x_i; \quad x_i(0) = \int_0^{\hat{\tau}} \alpha_i(\xi) x_i(\xi) d\xi. \quad (37)$$

Пусть выполнены предположения подпункта 3.2.1 относительно функций задачи. Требуется минимизировать функционал

$$I = -F = - \int_0^{\hat{\tau}} \sum_{i=1}^n F_{0i}(\tau, u_i, x_i) d\tau \rightarrow \inf \quad (38)$$

при условиях (37) и ограничениях на управление

$$\vec{u}(\tau) \in D, \quad D = \{ \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) : 0 \leq u_i(\tau) \leq U_i, \quad i = 1, \dots, n \}. \quad (39)$$

Допустимое управление $\vec{u}(\tau)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных на $[0, \hat{\tau}]$ вектор-функций с конечным числом точек разрыва и со значениями из области D . Предполагается, что при любом допустимом \vec{u} задача (37) имеет единственное непрерывное решение. Составим гамильтониан:

$$H(\tau, \vec{x}(\tau), \vec{\psi}(\tau), \vec{u}(\tau)) = \sum_{i=1}^n \left[F_{0i}(\tau, u_i, x_i) + \psi_i (f_i - u_i x_i) - \mu_i \alpha_i x_i \right],$$

где функции $\psi_i(\tau), \mu_i(\tau)$ удовлетворяют сопряженной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i}{d\tau} &= - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j \right) + \psi_i u_i - \frac{\partial F_0}{\partial x_i} + \mu_i \alpha_i - \\ &- \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \int_0^{\hat{\tau}} \psi_j(\xi) \frac{\partial f_j(\xi, x_1(\xi), \dots, J_{11}^j(\xi), \dots)}{\partial J_{ik}^j} \chi_{ik}^j(\xi, \tau) d\xi, \quad \psi_i(\hat{\tau}) = 0; \\ \frac{d\mu_i(\tau)}{d\tau} &= 0, \quad \mu_i(0) = -\psi_i(0), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление определяется из условия максимума гамильтониана

$$u_i(\tau) = \arg \max_{0 \leq v_i \leq U_i} H(\tau, \vec{x}, \vec{\psi}, \vec{v}), \quad i = 1, \dots, n.$$

В частном случае $F_{0i} = c_i u_i x_i$, $i = 1, \dots, n$ оптимальное управление выражается формулой:

$$u_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \psi_i(\tau) > c_i(\tau), \\ \text{произвольное } v_i(\tau), & 0 \leq v_i(\tau) \leq U_i, \quad \psi_i(\tau) = c_i(\tau), \\ U_i, & \psi_i(\tau) < c_i(\tau). \end{cases} \quad (40)$$

В четвертом разделе рассматриваются приближенные методы решения задач, рассмотренных во втором и третьем разделах.

В пункте 4.1 для численного решения уравнений динамики возрастного состава биологической популяции (5) предлагается итерационный метод, базирующийся на методе характеристик. Вдоль характеристик,

определяемых уравнением $\frac{dt}{d\tau} = 1$, уравнение (5) превращается в обыкновенное дифференциальное $\frac{dx}{dt} = f_1(t, \tau', x(t, \tau'))$, $f_1 = f - ux$, где τ' — точка на характеристике. Численное решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения ищется явным методом Рунге-Кутты второго порядка (Хайрер и др., 1990). Решение задачи (5) ищется по следующей схеме:

1. В области $G = [0; T] \times [0; \hat{\tau}]$ вводится равномерная сетка с шагом h по времени и возрасту.
2. Сначала находятся значения $x_i^j = x(t_i, \tau_j)$ в узлах сетки с индексами, удовлетворяющими условию $i \leq j$:

$$x_i^j = x_{i-1}^{j-1} + \frac{h}{2} \cdot \left(f_1(t_{i-1}, \tau_{j-1}, x_{i-1}^{j-1}) + f_1(t_i, \tau_j, x_{i-1}^{j-1} + h \cdot f_1(t_{i-1}, \tau_{j-1}, x_{i-1}^{j-1})) \right),$$

при этом в качестве начальных значений принимаются $x_i^j = x_0(\tau_j)$.

3. Затем ищется решение в узлах сетки с индексами $i > j$. Для каждого $i \geq 1$ задается первое приближение для внутреннекраевого условия

$$(x_i^0)_1 = \Phi(\underline{s}), \quad \underline{s} = s_{i-1}, \quad s_i = \sum_{k=0}^{N_2-1} \frac{h}{2} (\alpha_i^k x_i^k + \alpha_i^{k+1} x_i^{k+1}), \quad i = 1, \dots, N_1.$$

4. Внутреннекраевое условие корректируется:

$$(x_i^0) = \Phi(\hat{s}), \quad \hat{s} = s_i, \quad i = 1, \dots, N_1. \quad (41)$$

5. Выполняется проверка условия:

$$|\Phi(\underline{s}) - \Phi(\hat{s})| < \epsilon, \quad (42)$$

где ϵ — достаточно малое число. Если оно не выполнено, то принимается $\underline{s} = \hat{s}$ и осуществляется переход к шагу 4.

6. Если условие (42) выполнено, то для всех $k \geq 1$, таких что $i + k \leq N_1$, $k \leq N_2$, находятся значения

$$\begin{aligned} x_{i+k}^k &= x_{i+k-1}^{k-1} + \frac{h}{2} \cdot \left(f_1(t_{i+k-1}, \tau_{k-1}, x_{i+k-1}^{k-1}) + \right. \\ &\left. + f_1(t_{i+k}, \tau_k, x_{i+k-1}^{k-1} + h \cdot f_1(t_{i+k-1}, \tau_{k-1}, x_{i+k-1}^{k-1})) \right). \end{aligned}$$

Для большинства популяций $\alpha(t, \tau) = 0$ при $0 \leq \tau \leq \xi(t)$, $\xi(t) > 0$, так как новорожденные особи не сразу готовы к воспроизводству. Это значит, что $\alpha_i^0 = 0$, и метод значительно упрощается, так как шаги 3–5 заменяются простым вычислением решения в крайнем левом узле по известному решению в остальных узлах на этом слое по формуле (41).

В пункте 4.2 предлагается итерационный численный метод решения систем уравнений модели сообщества популяций с возрастной структурой. В его основе лежит указанный метод характеристик.

В пункте 4.3 построены алгоритмы поиска оптимальных решений на основе метода условного градиента (ЧУГ) (Васильев, 1981). Приведем алгоритм приближенного решения задачи ОЭ биологической популяции (5), (7), (8), в основе которого лежит метод ЧУГ. Пусть известно некоторое текущее приближение управления $u^j(t, \tau)$. С заданной функцией $u^j(t, \tau)$ решается задача (5) и определяется текущее значение функционала (7). Формулируется и решается задача определения малой вариации Δu^{j+1} из условий

$$\min_{\Delta u} \delta I = \min_{\Delta u} \left(\frac{\partial I}{\partial u}, \Delta u \right) = \min_{\Delta u} \int_0^T \int_0^{\hat{\tau}} \Delta u \cdot (x^j \cdot \psi^j - \frac{\partial F_0}{\partial u}) dt d\tau, \quad (43)$$

$$\Delta u^{j+1} \in \Delta U^{j+1}(t, \tau), \quad (44)$$

где x^j, ψ^j — решения задач (5) и (10) при заданном $u^j(t, \tau)$. Из (44) должно следовать, что $u^{j+1}(t, \tau) = u^j(t, \tau) + \Delta u^{j+1} \in D$. На каждом шаге процесса решение задачи (43)-(44) позволяет осуществить переход к управлению $u^{j+1}(t, \tau) \in D$, при этом (43) обеспечивает максимальное понижение целевого функционала I .

При конечномерной аппроксимации вводится равномерная по времени и возрасту сетка. В качестве искомого управления $u(t, \tau)$ в расчётах выступает кусочно-постоянная функция. Вариация управления ищется в том же классе кусочно-постоянных функций. Задача определения малых возмущений $(\Delta u^{j+1})_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$ сводится к задаче линейного программирования

$$\min_{\Delta u} \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2-1} \left[\omega_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\Delta u^{j+1})_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, \omega_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (x^j \psi^j - \frac{\partial F_0}{\partial u}) dt d\tau \right] \quad (45)$$

$$(\Delta -)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \leq (\Delta u^{j+1})_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \leq (\Delta +)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (46)$$

Числа $(\Delta -)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, (\Delta +)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$ ограничивают значения управления $u^j(t, \tau) + \Delta u^{j+1}$ пределами множества D , и должны быть достаточно малыми, чтобы обеспечить достаточную точность формулы (43). Итерационный процесс продолжается, пока не выполняется условие

$$|I_{j+1} - I_j| \leq \varepsilon, \text{ или } \frac{|I_{j+1} - I_j|}{1 + |I_j|} \leq \varepsilon,$$

где I_j — значение функционала на j -ой итерации, ε — некоторое заданное малое положительное число. Приближенное решение задач подпунктов 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1, 3.2.2 также осуществляется по указанному алгоритму.

В пункте 4.4 предлагается численный метод решения задачи ОЭ при наличии функциональных ограничений. Здесь задача линейного программирования (45)-(46) дополняется неравенствами, возникающими при линеаризации функциональных ограничений, и для её решения применяется симплекс-метод.

В пункте 4.5 представлены примеры численного моделирования.

В подпункте 4.5.1 приведены модельные расчеты оптимальных режимов для серии задач ОЭ популяции трески (*Gadus macrocephalus*) юго-западной части Берингова моря (трески Карагинского и Олюторского заливов) в течение $T = 50$ лет с начала 2005 года. Сначала исследуется задача (5), (7), (8). Максимальный возраст рыб принят равным $\hat{\tau} = 10$ лет. Функция f в уравнении выживаемости предполагается равной $f(t, \tau, x) = -mx$, где $m(\tau)$ — коэффициент элиминации от естественных причин в возрасте τ . Функция $\Phi(s)$ в уравнении рождаемости имеет вид (Рикер, 1979): $\Phi(s) = ase^{-bs}$ (Рикер, 1979), где s — биомасса родителей. Коэффициент рождаемости имеет вид: $\alpha(\tau) = w(\tau)\beta(\tau)$, где $w(\tau)$ — масса, $\beta(\tau)$ — доля половозрелых рыб. Функции m, w, β определены по данным промысловой статистики (Приложение 1) методом наименьших квадратов. Начальное распределение численности $x_0(\tau)$ и коэффициенты Рикера a, b найдены методом наименьших квадратов из оценок биомассы родителей и численности рыб нулевого возраста, полученных при помощи процедуры виртуально-популяционного анализа (Gulland, 1969). Функция стоимости выбрана в виде:

$$c(\tau) = c_0(\tau)w(\tau), \quad c_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 2 \\ 1, & \tau \geq 2, \end{cases}$$

и означает, что промысловую значимость имеют рыбы старше двух лет. Функция дохода от изъятия имеет вид (12), а функционал (6) выражает биомассу имеющего промысловую значимость улова за $T=50$ лет. Допустимые значения интенсивности промысла принадлежат отрезку $[0; 1]$.

Оптимальное управление в задаче ОЭ трески юго-западной части Берингова моря имеет кусочно-постоянный вид: $u(t, \tau) = 0$ в заштрихованной области (рис. 1) и $u(t, \tau) = 1 \text{ год}^{-1}$ в области, свободной от штриховки. Оптимальная эксплуатация позволит за 50 лет изъять 1291495.59 тонн трески. Сначала на отрезке времени $0 \leq t < 11.8$ запас выводится на некоторый равновесный режим, обеспечивающий максимальный устойчивый улов при оптимальной равновесной интенсивности промысла. Это — так называемый «магистральный» режим, при котором изымаются только рыбы с возрастом 5.21 лет и старше. Ему соответствует интервал $11.8 \leq t < 42.3$. На отрезке $42.3 \leq t < 48$ осуществляется

переход от «магистрального» режима к периоду «хищнической» эксплуатации запаса, который имеет место при $48 \leq t \leq 50$. При «хищнической» эксплуатации с максимальной интенсивностью облавливаются все рыбы промысловой части запаса ($\tau \geq 2$). Численные эксперименты показывают, что при $T \rightarrow \infty$ будет преобладать «магистральный» равновесный режим, а при малых T — «хищническая» эксплуатация.

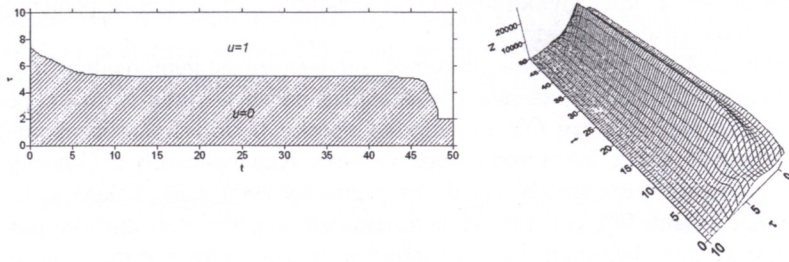


Рис. 1. Интенсивность промысла (слева, год⁻¹) и плотность биомассы $z = wx$ (справа, тонн \times год⁻¹) трески при оптимальной эксплуатации.

При оптимальной эксплуатации в равновесном режиме с максимальной интенсивностью $U = 1$ год⁻¹ изымаются особи старше $\tau^* = 5.21$ лет, а рыбы моложе $\tau^* = 5.21$ лет вообще не подвергаются промыслу (рис. 2). Величина максимального равновесного годового улова трески юго-западной части Берингова моря равна 26636.3 тонн.

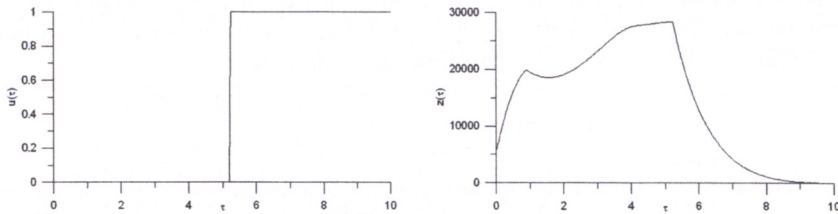


Рис. 2. Интенсивность промысла (слева, год⁻¹) и плотность биомассы (справа, тонн \times год⁻¹) трески при оптимальной эксплуатации в равновесном режиме.

Далее рассматривается задача ОЭ с заданной функцией улавливаемости (19)-(21) и функцией дохода (12). Так как коэффициент улавливаемости определить не удалось, воспользовались возрастным коэффициентом селективности (избирательности) орудий лова $\mu(\tau)$ при современном состоянии промысла трески. Интенсивность промысла имеет вид $u(t, \tau) = \mu(\tau)v(t)$. Управлением v в этой задаче выступает интенсивность промысла рыб с возрастом, соответствующим максимальной ($\mu = 1$) селективности орудий лова.

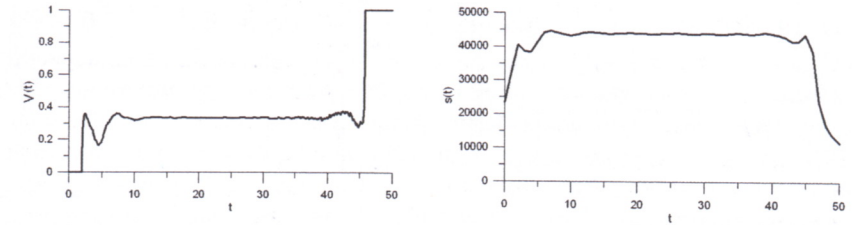


Рис. 3. Оптимальная интенсивность промысла (слева, год⁻¹) и биомасса производителей (справа, тонн) трески в задаче ОЭ с заданной функцией возрастной селективности.

Расчёты показывают (рис. 3), что в задаче ОЭ с заданной функцией возрастной селективности также проявляются асимптотические «магистральные» свойства. «Магистральному» режиму соответствует «особое» управление $v(t) = 0.3265$ год⁻¹. Для всех t из интервала, на котором действует «магистральный» режим, выполняется $\int_0^{\tau} qx(\psi - c)d\tau = 0$, по-

этому особое управление не может быть однозначно определено из условия (23). За промежуток времени от 0 до ≈ 11.2 запас выводится на «магистральный» режим, продолжительное время (до $t \approx 38.5$) удерживается на «магистрали» управлением $v(t) = 0.3265$ год⁻¹. На «магистрали» ежегодно (до $t \approx 38.5$) изымается $F = 20335.13$ тонн. Затем наступает период «хищнической» эксплуатации с максимальной интенсивностью промысла. При современной селективности промысла оптимальный режим эксплуатации позволит за 50 лет выловить 1003621.87 тонн трески.

В реальных условиях недопустимо такое снижение биомассы производителей трески (рис. 3), связанное с «хищнической» эксплуатацией запаса. В этой связи рассмотрена задача оптимальной эксплуатации трески с функциональными ограничениями (25)-(28). Функциональными ограничениями (24) являются требования, чтобы на конец каждого календарного года, начиная с 41-го, т.е. при $t_k = 40 + k$, $k = 1, \dots, 10$, биомасса родителей $s(t)$ была не меньше, чем $S_{0k} = S = 40000$ тонн.

Рис. 4 демонстрирует приближенное решение задачи ОЭ трески юго-западной части Берингова моря с ограничениями на величину биомассы производителей. Относительная погрешность ограничений $\frac{|I_k|}{S}$, $k = 1, \dots, 10$ не превышает величины $\varepsilon_1 = 10^{-3}$. На отрезке времени $0 \leq t \leq 38.5$ решения задач с ограничениями и без ограничений (рис. 3) согласуются. Согласно оптимальной стратегии промысла в задаче с функциональными ограничениями, за 50 лет эксплуатации изымается 974027.42 тонн трески, при этом в моменты времени $t = 41, 42, \dots, 50$ биомасса производителей составляет не менее 40 тыс. тонн.

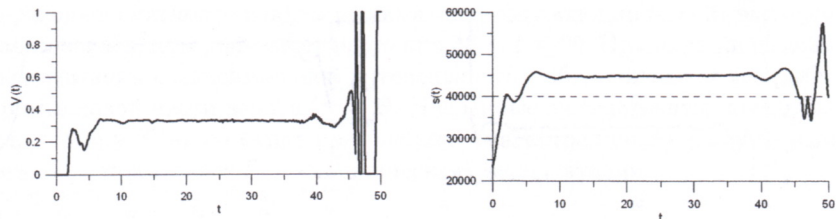


Рис. 4. Оптимальная интенсивность промысла (слева, год⁻¹) и биомасса производителей (справа, тонн) трески в задаче ОЭ с функциональными ограничениями.

В подпункте 4.5.2 проведено численное исследование задачи ОЭ с функциональными ограничениями (25)-(28) на примере с данными по запасу восточноохотоморского минтая. Возраст рыб изменяется в пределах от 0 до $\hat{\tau} = 11$ лет, начало отсчета $t = 0$ соответствует началу 2007 года, период эксплуатации T равен 3 годам. Плотность распределения численности описывается уравнением (25), $f = -mx$, $\Phi(s) = as \exp(-bs)$, где s — биомасса производителей, $\alpha(\tau) = w(\tau)\beta(\tau)$, w — масса, β — доля половозрелых рыб. Функции w, m, β , коэффициенты Рикера a, b , улавливаемость $q(\tau)$ и начальная форма распределения численности $x_0(\tau)$ получены по данным промысловой статистики (Приложение 2). Функция стоимости имеет вид $c(t, \tau) = w(\tau)$, значение функционала (26) равно биомассе выловленных рыб с возрастом от 0 до 11 лет за три года. В качестве U взяли максимальное за всю историю промысла значение промыслового усилия $U = 46.3$ тыс. судосудок в год. Биомасса родителей на конец каждого календарного года $s(t_k), t_k = k, k = 1, 2, 3$ из заданного промежутка времени T должна быть не ниже значения на конец 2006 года: $s(0) = 1770.76$ тыс. тонн.

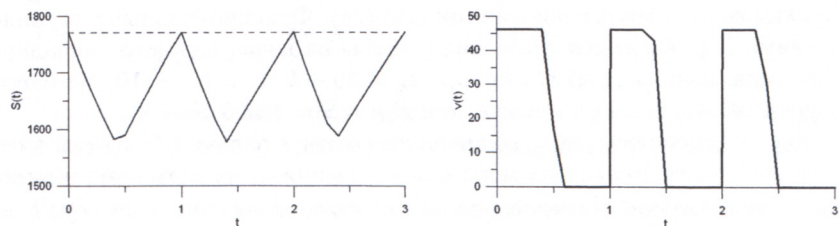


Рис. 5. Биомасса родителей (слева, тыс. тонн) и интенсивность промыслового усилия (справа, год⁻¹) при оптимальной эксплуатации минтая.

Численное решение задачи ОЭ минтая представлено на рис. 5. Значение целевого функционала (26) составило $I = -1284.455$. Функциональные ограничения (27) соблюдаются с относительной погрешностью

$\frac{|I_k|}{s(0)} < 0.5 \cdot 10^{-3}$. Каждому k -му календарному году из заданного промежутка времени T соответствует отрезок времени $[t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, 3$. На каждом таком отрезке времени запас сначала эксплуатируется с максимальной интенсивностью, затем изъятие прекращается, чтобы к моменту времени $t = t_k$ биомасса производителей восстановилась до уровня $s(0)$. При условии сохранения биомассы производителей минтая к концу каждого года на уровне не ниже 1770.76 тыс. тонн, за 3 года из запаса можно изъять 1284.455 тыс. тонн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы следующие задачи.

1. Задача оптимальной эксплуатации в непрерывной модели популяции с возрастной структурой, в том числе в стационарном состоянии и с учетом функциональных ограничений.
2. Задача оптимальной эксплуатации в непрерывной модели сообщества биологических популяций с возрастной структурой.

Выяснены условия однозначной разрешимости системы уравнений непрерывной модели популяции с возрастной структурой. Предложена непрерывная модель сообщества биологических популяций с возрастной структурой, учитывающая внутри- и межвидовые конкурентные взаимоотношения и отношения «хищник-жертва». На примере запасов трески юго-западной части Берингова моря и восточноохотоморского минтая показана принципиальная возможность использования непрерывной модели динамики возрастной структуры популяции для моделирования различных оптимальных режимов эксплуатации морских промысловых видов рыб дальневосточных морей. В приведенных расчетах проявляются магистральные свойства оптимальных решений, аналогичные таковым свойствам в моделях динамики однородных популяций.

Основные результаты проведенных исследований:

1. Установлены необходимые условия оптимальности управления в задачах оптимальной эксплуатации популяций с возрастной структурой и их сообществ.
2. Осуществлено построение алгоритмов численного решения систем уравнений и задач оптимизации в непрерывных моделях популяций с возрастной структурой и их сообществ.
3. На основе непрерывной модели динамики возрастной структуры найдены оптимальные стратегии изъятия для запасов трески юго-западной части Берингова моря и восточноохотоморского минтая.

Опубликованные работы по теме диссертации

1. Ильин О.И. К вопросу об оптимальной эксплуатации сообщества пелагических рыб западной части Берингова моря. Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях биоресурсов мирового океана: Тезисы докладов. Материалы отраслевого семинара. Владивосток. ТИНРО-центр. 2004.
2. Ильин О.И. Об одной задаче оптимального управления биологическим сообществом // Сибирский журнал индустриальной математики, т. 9, № 4 (28), 2006. С. 75–81.
3. Ильин О.И. Об оптимальной эксплуатации популяции рыб с возрастной структурой // Сибирский журнал индустриальной математики, т. 10, № 3 (31), 2007. С. 43–57.
4. Ильин О. И. Об оптимальной эксплуатации популяции несколькими типами орудий лова // Сб. науч. тр. Камчат. НИИ рыб. хоз-ва и океанографии. Вып. 9. 2007. с.258-260.
5. Ильин О. И. Об одном методе оценки запасов и оптимального вылова популяции с возрастной структурой // Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях биоресурсов мирового океана: Тезисы докладов. Материалы отраслевого семинара. Владивосток. ОИТ ТИНРО-центра. 2007. с. 13-16.
6. Ильин О. И. О численном решении задачи оптимальной эксплуатации промысловой популяции биологических объектов. Тезисы докладов математической школы-семинара имени академика Е.В.Золотова. — Владивосток, 2007. с.70-71.
7. Ильин О. И. Об одном методе оценки запасов и прогноза ОДУ морских промысловых рыб на основе непрерывной модели динамики возрастной структуры популяции // Сб. науч. тр. Камчат. НИИ рыб. хоз-ва и океанографии. Вып. 13. 2009. с.27-34.
8. Компьютерная программа, реализующая алгоритм численного решения задачи оптимальной эксплуатации популяции для модели МакКендрика-Фон Фёрстера (FishControl) / Ильин О. И. (Находится на регистрации в Федеральном государственном учреждении «Федеральный институт промышленной собственности Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам»).