Методические рекомендации

Применение математических методов и моделей для оценки запасов рыб

- 1984 -

ВНИРО

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ РЫБ

МОСКВА 1984

Министерство рыбного хозяйства СССР
Всесоюзный научно-исследовательский институт
морского рыбного хозяйства и океанографии
(ВНИРО)

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВНИРО
А.Студенецкий
"1" 26.10 1984г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ.
ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ РЫБ

Москва 1984

УДК 639.2.053.7:639.2.053.8

Методические рекомендации составлены:
В.К.Бабаяном, Т.И.Булгаковой, Р.Г.Бородиным,
Ю.Н.Ефимовым

ВВЕДЕНИЕ

Развитие мировой рыбохозяйственной науки в последние десятилетия показывает, что оценить величины запасов промысловых объектов, установить оптимальные режимы эксплуатации и прогнозировать уловы невозможно без применения математических моделей и методов. Необходимость их использования очевидна, проблема заключается в отсутствии достаточного количества специалистов-биологов, имеющих навык работы с моделями.

Работа по внедрению методов теории рыболовства в практику рыбохозяйственных исследований началась с публикаций Ф.И.Баранова, А.В.Засосова, Н.Н.Андреева и др. Эти разработки носили в основном теоретический характер. Вопросам методологии уделялось сравнительно мало внимания в результате при использовании этих методов нередко допускаются серьезные ошибки.

Для популяризации методов теории рыболовства и предотвращения ошибок в использовании математических моделей и методов в последние годы во ВНИРО и бассейновых институтах подготовлен ряд методических рекомендаций. В них рассмотрены разные аспекты теории рыболовства и, дополняя друг друга, они позволяют составить представление о правилах использования различных способов оценки величины запаса и прогнозирования допустимого улова объектов рыболовства. К таким разработкам относятся методические рекомендации, изданные во ВНИРО (Ефимов, 1980; Драпацкий и др., 1982; Бабаян, 1982; Бородин, 1983) и в АтлантНИРО (Гасюков и др., 1980).

Во ВНИРО также создан фонд программ для расчетов по различным моделям и методам на ЭВМ, перечень которых приводится в справках о задачах для ЭВМ третьего поколения, изданных в 1982 и 1984 гг.

Цель предлагаемой работы - анализ наиболее употребимых и приемлемых моделей и методов и выработка рекомендаций по их применению, в основном методов оценки запасов и важнейших параметров популяций, необходимых для расчетов по математическим моделям. Особое внимание уделено анализу методов,пока еще редко используемых для популяций рыб (методы Аллена, Де-Лури и их модификации).

I. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОПУЛЯЦИЙ

I. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ РОСТА

При построении или выборе математической модели стада рыб почти всегда необходимо выбрать уравнение, описывающее рост особей в онтогенезе.

Следует различать "индивидуальный" рост, представляющий собой рост отдельной особи или отдельного поколения (однородной группы особей) и "популяционный" рост, "характеризующий средние размеры (вес) особей разных возрастных групп, одновременно присутствующих в популяции" (Мина, 1973). Весовой и линейный рост могут меняться от поколения к поколению, так как рост зависит как от плотности самого поколения, так и от условий среды. Проследить, а затем аппроксимировать некоторым уравнением рост особей в отдельных поколениях - сложная, но выполнимая задача. Она требует многолетних данных по массе, длине и возрасту для одного и того же поколения.

Большей частью при использовании модели для оценки запаса и выработки рекомендаций для промысла имеют дело с популяционным ростом. Для этих моделей необходимо знать как функцию связи массы и длины, так и зависимости длины от возраста и массы от возраста.

Зависимость массы от длины

Для определения функции связи массы и длины необходимо в качестве входной информации иметь измерения (l_i, w_i). Если таких точек много, их можно сгруппировать по коротким размерным классам и в качестве входных данных для построения зависимости использовать усредненные для каждого класса данные. Такая процедура упрощает расчеты параметров, если их проводить вручную. При работе же с ЭВМ имеет смысл вводить первичный набор данных - это позволит получить более достоверные оценки параметров и их доверительных интервалов.

функция связи массы и длины обычно описывается уравнением

$$W = Al^{B}. \qquad (I)$$

Это эмпирическое уравнение аллометрического (если В $\neq$ 3) или изометрического (В = 3) роста. Грубая теория этого уравнения: масса особи пропорциональна объему ее тела: $W = \rho \cdot V$. Плотность вещества ρ в первом приближении может считаться постоянной, но в общем случае изменяется с ростом линейного размера l. Если при росте сохраняется геометрическое подобие, т.е. если линейные размеры тела (длина l, ширина x, высота y) изменяются пропорционально ($x = k_1 l$; $y = k_2 l$), то объем тела пропорционален кубу линейного размера, т.е. В = 3.

Поскольку при росте особи часто геометрическое подобие не сохраняется, В $\neq$ 3. Большие материалы по росту рыб и водных беспозвоночных показали, что параметр В в большинстве случаев лежит в пределах от 2,3 до 3,3, но иногда выходит из этих пределов (Винберг, I97I). Часто для одного и того же вида, но для разных популяций или при разных условиях параметр В сильно варьирует.

Следует иметь в виду, что в процессе развития организма соотношение различных веществ в теле меняется; поэтому в зависимости от того, в каких единицах измеряется масса тела (сухой вес, калорический коэффициент, содержание углерода и т.д.), будут получаться различные значения параметров А и В.

Метод расчета параметров А и В обычно следующий: логарифмируя, получаем линейное уравнение

$$\lg W = \lg A + B \lg l, \qquad (2)$$

параметры которого ($\lg A$ и B) находят методом наименьших квадратов.

П р и м е р. Данные по росту ставриды Trachurus tr. capensis Юго-Восточной Атлантики для 1979 г. (данные Е.Флоринской, взяты из работы Бабаяна и Булгаковой (Babayan, Bulgakova, 1983) и порядок расчетов приводим в табл. I.
При этом

$$B = \frac{\Sigma x_i y_i - (\Sigma y_i)\bar{x}}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)\bar{x}} = \frac{46{,}826 - 30{,}I5 \cdot I{,}53I}{28{,}366 - I8{,}367 \cdot I{,}53I} = 2{,}680;$$

$$\lg A = \bar{y} - B\bar{x} = 2{,}5I3 - 2{,}68 \cdot I{,}53I = -I{,}589; \quad A = 0{,}0257.$$

Т а б л и ц а I

Расчет зависимости "масса - длина" для ставриды Юго-Восточной Атлантики

Возраст	Длина, ℓ см	Масса, W г	$\lg \ell = x$	$\lg W = y$
I	I6,7	49	I,223	I,690
2	20,8	92	I,3I8	I,964
3	24,8	I39	I,394	2,I43
4	28,7	205	I,458	2,3I2
5	33,5	305	I,525	2,484
6	36,3	377	I,560	2,576
7	39,3	480	I,594	2,68I
8	4I,7	557	I,620	2,746
9	44,I	605	I,644	2,782
I0	46,I	676	I,664	2,830
II	48,I	880	I,682	2,944
I2	48,5	995	I,685	2,998

$\Sigma x_i = 18,367$; $\Sigma y_i = 30,150$;
$\bar{x} = 1,531$; $\bar{y} = 2,513$;
$\Sigma x_i^2 = 28,366$; $\Sigma x_i y_i = 46,826$.

Уравнение связи имеет вид $W = 0,0257 \cdot \ell^{2,680}$. Однако следует иметь в виду, что,поскольку в данном случае находим параметры, соответствующие минимуму $\Sigma (\lg W_i - \lg \bar{W})^2$, а не минимуму $\Sigma (W_i - \bar{W})^2$, оценки получаем смещенные. По данным Гласса (Class, I967), оценка B при этом получается заниженной, и как сама оценка B, так и ее погрешность, существенно зависят от диапазона значений ℓ. Рассмотрим предложенную Глассом итерационную процедуру.

Обозначим через $\{ W_i , \ell_i \}$ результаты измерений массы и длины, $u_i = A \ell_i^B$ - значения теоретической функции в точке ℓ_i. Выбираем некоторые пробные значения искомых параметров, в данном случае A_0 и B_0. Функцию u_i раскладываем в ряд Тейлора в окрестности точки (A_0 , B_0). Отбрасывая члены разложения второго порядка и выше, получаем линеаризованную функцию

$$u_i \approx A_0 \ell_i^{B_0} + \Delta A \frac{\partial u_i}{\partial A} + \Delta B \frac{\partial u_i}{\partial B} .$$

Согласно методу наименьших квадратов, при первой итерации минимизируем сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\left[v_i-\left(\Delta A\frac{\partial u_i}{\partial A}+\Delta B\frac{\partial u_i}{\partial B}\right)\right]^2, \qquad (3)$$

где через v_i обозначаем $w_i - A_0 l_i^{B_0}$, а производные равны

$$\frac{\partial u_i}{\partial A}=l_i^{B_0}; \quad \frac{\partial u_i}{\partial B}=A_0 l_i^{B_0}\cdot \ln l_i .$$

Приравнивая нулю производные выражения (3) по ΔA и ΔB, получаем систему линейных уравнений ΔA и ΔB

$$\begin{cases}\Delta A\cdot C_{11}+\Delta B C_{12}=D_1\\ \Delta B\cdot C_{21}+\Delta B C_{22}=D_2\end{cases},$$

где

$$C_{11}=\sum\left(\frac{\partial u_i}{\partial A}\right)^2; \quad C_{22}=\sum\left(\frac{\partial u_i}{\partial B}\right)^2;$$

$$C_{12}=C_{21}=\sum\left(\frac{\partial u_i}{\partial A}\right)\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial B}\right);$$

$$D_1=\sum v_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial A} \quad \text{и} \quad D_2=\sum v_i\cdot\frac{\partial u_i}{\partial B}.$$

Решение этой системы уравнений

$$\Delta A=-\frac{\begin{vmatrix}D_1 & C_{21}\\ D_2 & C_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}C_{11} & C_{21}\\ C_{12} & C_{22}\end{vmatrix}}; \quad \Delta B=\frac{\begin{vmatrix}C_{11} & D_1\\ C_{21} & D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}C_{11} & C_{21}\\ C_{12} & C_{22}\end{vmatrix}}.$$

Итак, порядок расчета таков:

1) выбор A_0, B_0;

2) расчет $\frac{\partial u_i}{\partial A}=l_i^{B_0}$ и $\frac{\partial u_i}{\partial B}=A_0 l_i^{B_0}\cdot\ln l_i$ для $i=\overline{1,n}$;

3) расчет сумм по i $(C_{11}, C_{12}, C_{22}, D_1, D_2)$;

4) расчет определителей;

5) расчет ΔA, ΔB и $A_1=A_0+\Delta A$, $B_1=B_0+\Delta B$.

По новым значениям параметров A_1 и B_1 все расчеты повторяются (проводится следующая итерация). Но прежде чем переходить к следующей итерации, следует проверить, дала ли улучшение аппроксимация предыдущая, т.е. уменьшилась ли сумма квадратов отклонений W_i от теоретической функции. В данном случае, если $\sum(W_i - A_1 \ell_i^{B_1})^2 < \sum(W_i - A_0 \ell_i^{B_0})^2$, то следует продолжать расчеты. Иначе нужно остановиться на параметрах A_0, B_0 (на предыдущей итерации).

Следует иметь в виду, что данный метод не всегда приводит к положительному результату. Во-первых, определяется минимум суммы квадратов отклонений от линеаризации функции (I), а не от нее самой. Во-вторых, разложение в ряд ведется в окрестности точки (A_0 , B_0), т.е. существенно зависит от выбора пробных значений параметров. Автор указывает на то, что итерационный процесс расходится, если пробные значения параметров далеки от истинных и если велик разброс точек.

Потому следует в качестве пробных значений выбирать те, которые получены при построении линии регрессии $\lg W$ по $\lg \ell$ (см. табл. I), и по изменению $\sum V_i^2$ судить о преимуществах итерационного метода.

П р и м е р. Выбрав $A_0 = 0,0257$ и $B_0 = 2,680$, проведем расчеты по входным данным табл. I (столбцы ℓ и W).Первая же итерация приводит к значению $\Delta A = -0,0307$,т.е. $A_1 < 0$. Отрицательное значение A_1 не имеет смысла. Предположив, что такой результат получился из-за большого разброса точек W_i относительно $A_0 \ell_i^{B_0}$, отбрасываем последнюю точку ($t = 12$), для которой $V_{12} = 148,3$. В этом случае для II точек логарифмический метод дает зависимость $W = 0,030 \cdot \ell^{2,630}$. При этом $\sum V_i^2$ уменьшился с 3I,6I2 до 9400.

В табл. 2 приведена последовательность расчетов при $A_0 = 0,030$ и $B_0 = 2,630$. Получено $\Delta A = -0,0115$ и $\Delta B = 0,097$, т.е. $A_1 = A_0 + \Delta A = 0,018$; $B_1 = 2,727$. При этом резко возросла $\sum V_i^2$ (до 6I204,77), поэтому ясно, что в данном случае итерационный метод применять нецелесообразно и можно остановиться на параметрах $A = 0,03$ и $B = 2,63$, либо испробовать еще один (градиентный) метод.

Описанный итерационный метод связан с громоздкими вычислениями, которые нужно делать с большой точностью.Чтобы активно его использовать, необходима специальная программа для ЭВМ.

Гласс апробировал этот метод на многих примерах для вычисления зависимости энергетического обмена от массы тела рыб, и почти во всех случаях итерационный метод оказывался

Т а б л и ц а 2

Иллюстрация итерационного метода наименьших квадратов Гласса (A_0 = 0,030; B_0 = 2,630)

i	W_i	l_i	$\ln l_i$	$\frac{\partial u_i}{\partial A}$ $l_i^{2,630}$	$0,03 \cdot l_i^{2,630}$	$\frac{\partial u_i}{\partial B}$ $0,03 l_i^{2,63} \cdot \ln l_i$	v_i $W_i - 0,03 l_i^{2,63}$	$0,018 l_i^{2,727}$	v_i $W_i - 0,018 l_i^{2,727}$
I	49	I6,7	2,82	I643,404	49,302	I39,032	-0,302	38,87I	I0,I29
2	92	20,8	3,03	2927,565	87,827	266,II6	4,I73	70,734	2I,27
3	I39	24,8	3,2I	4649,5I8	I39,486	447,749	-0,486	II4,273	24,73
4	205	28,7	3,36	6826,992	204,8I0	688,I6I	0,I90	I70,I83	34,82
5	305	33,5	3,5I	I0253,399	307,602	I079,683	-2,602	259,460	46,00
6	377	36,3	3,59	I2663,520	379,906	I363,86I	-2,906	322,952	54,05
7	480	39,3	3,67	I5604,592	468,I38	I7I8,066	II,862	40I,034	78,97
8	557	4I,7	3,73	I8237,I86	547,II6	2040,74I	9,884	47I,393	85,6I
9	605	44,I	3,79	2II28,735	633,862	2402,337	-28,862	549,I06	55,89
I0	676	46,I	3,83	23742,882	7I2,286	2728,057	-36,286	6I9,705	56,30
II	880	48,I	3,87	26548,596	796,458	3082,292	83,542	695,796	I84,20

C_{II} = 2636068264; D_I = I059207,408; Δ_1 = -I,26I3·I0^{I2}; Σv_i^2 = 9400,35; A_1 = 0,0I8;

C_{22} = 3362044I,20; D_2 = I23933,638; Δ_2 = I0,57·I0^{I2}; ΔA = -0,0I2; B_1 = 2,727;

C_{I2} = 2975I7040,5; Δ = I09,39·I0^{I2}; ΔB = 0,097; Σv_i^2 = 6I204,77.

эффективнее логарифмического. Обычно при этом достаточно было 3-6 итераций.

Зависимости массы и длины тела от возраста

Этими зависимостями занимались многие ученые. Обширная сводка различных уравнений роста приведена Рикером (Рикер, 1983). Не будем их перечислять. Большинство из этих уравнений чисто эмпирические, некоторые строились на основе теоретических соображений, но и они не выдерживают серьезной критики (Винберг, 1973; Мина, 1973). Потому для оценки запасов рекомендуем использовать самые употребительные из них.

Уравнение Пюттера-Броуди-Берталанфи-Тейлора в общем виде для массы имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = N \cdot w^{a/b} - Kw. \tag{4}$$

Это уравнение решается следующим образом:

$$w(t) = w_\infty \left(1 - e^{-k\frac{b-a}{b}(t-t_0)}\right)^{b/b-a}, \tag{5}$$

где a, b, N, K, t_0 – постоянные параметры, причем b – параметр связи массы и длины, $a < b$ (при $a > b$ получается, что удельная скорость роста $\frac{dw}{w\,dt}$ растет с ростом w, что лишено биологического смысла);

t_0 – формальный параметр – то значение переменной возраста, при котором $w = 0$. Часто $t_0 < 0$.

При $a = b$ уравнение (4) описывает экспоненциальный рост. При $a < b$ функция (5) имеет асимптоту $w_\infty = \left(\frac{N}{K}\right)^{b/b-a}$ и точку перегиба с ординатой

$$w_{пер} = \left(\frac{K}{N} \cdot \frac{b}{a}\right)^{b/a-b} = w_\infty \left(\frac{a}{b}\right)^{b/b-a}.$$

При совместном рассмотрении уравнений (I) и (4) получаем дифференциальное уравнение роста длины:

$$\frac{dl}{dt} = Hl^{a-B+1} - \frac{K}{B}l, \qquad (6)$$

где $H = \frac{N}{B} \cdot A^{(\frac{a}{B}-1)}$.

Его решение имеет вид

$$l_t = L_\infty (1 - e^{-K\frac{B-a}{B}(t-t_0)})^{1/B-a}. \qquad (7)$$

Асимптома функции $l(t)$ равна $L_\infty = (\frac{N}{K})^{1/B-a} \cdot A^{-1/B}$

и точка перегиба $l_{\text{пер.}} = L_\infty (a - B + 1)^{(1/B-1)}$.

Очевидно, что точка перегиба в положительной области существует только при условии $B < a + 1$.

Если параметр B близок к 3, следует применять частный случай уравнений (5) и (7), соответствующий изометрическому росту. При этом коэффициент a выбирается равным 2. Тогда уравнения (5) и (7) упрощаются:

$$W(t) = W_\infty (1 - e^{-\frac{K}{3}(t-t_0)})^3 = W_\infty (1 - e^{-k(t-t_0)})^3; \qquad (5')$$

$$l_t = L_\infty (1 - e^{-k(t-t_0)}). \qquad (7')$$

Здесь $k = K/3$.

Методы оценки параметров уравнений (5'), (7'), а реже (5) и (7) изложены во многих руководствах (Рикер, 1979, 1983; Мина и Клевезаль, 1976). Наиболее прост <u>графический метод Форда-Уолфорда</u> для уравнения (7'). Этот способ пригоден при условии, что измерения возраста проведены через равные возрастные интервалы . Тогда (7) можно переписать в виде

$$l_t(t+T) = L_\infty (1 - e^{-k(t+T-t_0)}) = L_\infty (1 - e^{-kT}) + e^{-kT} \cdot l_t,$$

или $$l(t+T) = \alpha + \beta l(t), \qquad (8)$$

где $$\beta = e^{-kt}, \quad \alpha = L_\infty (1 - \beta).$$

Графически (8) - уравнение прямой линии, наклон которой характеризуется параметром β, а отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен α. Отсюда легко определяются параметры уравнения (7'), а именно $k = -\frac{1}{T}\ln\beta$, $L_\infty = \frac{\alpha}{1-\beta}$. Взяв какую-либо точку (ℓ_t, t), из уравнения (7) просто рассчитать грубую оценку t_0.

$$\hat{t}_0 = t - \frac{1}{k}\ln\frac{L_\infty - \ell_t}{L_\infty}.$$

Поскольку обычно точки (ℓ_t, ℓ_{t+1}) ложатся на прямую довольно близко (коэффициент корреляции около 0,9), прямую можно провести и от руки, получив грубые оценки параметров. Нетрудно провести и линию регрессии (8).

Аналогично можно рассуждать и при преобразовании уравнения массы (5')

$$W_t^{1/3} = W_\infty^{1/3}(1 - e^{-k(t-t_0)}).$$

$$W_{t+T}^{1/3} = W_\infty^{1/3}(1 - e^{-k(t-t_0+1)}) =$$

$$= W_\infty^{1/3}(1 - e^{-k(t-t_0)} \cdot e^{-kT}) + W_\infty^{1/3} \cdot e^{-k/T} - W_\infty^{1/3} e^{-kt},$$

или

$$W_{T+1}^{1/3} = \alpha_W + \beta W_t^{1/3}, \tag{9}$$

где $\alpha_W = W_\infty^{1/3}(1 - e^{-kT}) = \alpha \cdot A^{1/3}$. Тогда $k = -\frac{1}{T}\ln\beta$, $W_\infty = \left(\frac{\alpha_W}{1-\beta}\right)^3$.

Поскольку линии регрессии проводятся на основе статистических данных, параметры k, L_∞ и t_0, полученные по формуле (9), отличаются от их значений, полученных по формуле (8).

Нет необходимости здесь иллюстрировать расчеты параметров по методу Форда-Уолфорда - их можно найти в указанных руководствах.

Этот метод лег в основу метода Хоэндорфа - построения линии регрессии ℓ_{t+1} по ℓ_t. Пусть в выборке представлены возрасты от $t = \rho$ до $t = n$, причем $\Delta T = T = const$. Тогда

$$\beta = \frac{(n-\rho)\sum_\rho^{n-1} \ell_t \cdot \ell_{t+T} - (\sum_\rho^{n-1}\ell_t)\cdot(\sum_\rho^{n-1}\ell_{t+T})}{(n-\rho)\sum_\rho^{n-1}\ell_t^2 - (\sum_\rho^{n-1}\ell_t)^2}$$

$$\alpha = \frac{\sum \ell_{t+T} - \beta \sum \ell_t}{n-\beta};$$

$$t_0 = \frac{1}{k(n-\rho)} \cdot \sum \left[\ln(L_\infty - \ell_t) - \ln L_\infty \right] - \frac{n-\rho+1}{2};$$

$$k = -\frac{1}{T} \ln\beta; \quad L_\infty = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Суммирование ведется по t от ρ до $(n-1)$. При расчете параметров уравнения роста массы структура формул абсолютно та же, только в приведенных формулах вместо ℓ_t следует записывать $\sqrt[3]{W_t}$, а вместо L_∞ - $\sqrt[3]{W_\infty}$.

Алгоритм Хоэндорфа описан в "Методических рекомендациях..." (Гасюков, Доровских и Приц, 1980) и реализован в программах для ЕС-1033, составленных сотрудником АтлантНИРО Л.Н.Борониной на языке ФОРТРАН: ДР00402 (для линейного роста) и ДР00401 (для роста массы).

П р и м е р. Расчет по программе ДР00402 по данным (ℓ_t, t), приведенным в табл. I для капской ставриды, дал следующие оценки:

$$L_\infty = 62{,}56 \text{ (см)}, \quad k = 0{,}114, \quad t_0 = -1{,}61.$$

А по программе ДР00401, по данным (W_t, t)

$$W_\infty = 3183{,}66 \text{ (г)}, \quad k = 0{,}074, \quad t_0 = -2{,}93.$$

Видим, что различие полученных разными способами оценок k и t_0 довольно существенно, хотя из вывода уравнений роста ясно, что это одни и те же параметры. Оно объясняется статистическим характером расчетов. Можно выбрать оценки k и t_0, полученные при аппроксимации данных по росту длины и определить параметр W_∞' как $W_\infty' = A_1 L_\infty^3$, поскольку при данных расчетах рост предполагался изометрическим.

В отличие от уравнения (1) здесь параметр β задан заранее, потому находим A_1 как коэффициент регрессии W по $x = \ell^3$ (свободный член уравнения регрессии равен нулю) по формуле

$$A_1 = \frac{\sum w_i x_i}{\sum x_i^2} = 0{,}00781.$$

Тогда W_∞ = 1912,24 (г) - для ставриды эта величина кажется более реальной, чем 3183,66.

Сравним степень аппроксимации данных по массе двумя уравнениями:

$$W_1 = 1912{,}24\,(1 - e^{-0{,}114(t + 1{,}61)})^3 \qquad (10)$$

и

$$W_2 = 3183{,}66\,(1 - e^{-0{,}074(t + 2{,}93)})^3. \qquad (11)$$

Ошибка аппроксимации, рассчитываемая по формуле

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_i - W_{T_i})^2\right]},$$

равна соответственно 37,33 и 31,67 (табл. 3), W_{T_i} - значения массы, рассчитанные по (10) или (11) для i-й возрастной группы. Если нанести точки на график, создается впечатление, что обе зависимости одинаково хорошо описывают наблюденные точки. Самые большие отклонения наблюдаются в старших возрастных группах.

Таблица 3

Аппроксимация данных по росту массы капской ставриды разными уравнениями (S_a - ошибка аппроксимации)

t	W_t	Для n = 12		Для n = 11	
		W_1	W_2	W_1	W_2
1	49,0	32,60	51,16	34,51	53,86
2	92,0	73,43	90,93	72,24	94,61
3	139,0	130,61	142,68	124,60	147,18
4	205,0	201,68	205,59	190,36	210,65
5	305,0	283,57	278,49	267,63	283,77
6	377,0	373,13	360,01	354,30	365,04
7	480,0	467,45	448,70	448,19	453,05
8	557,0	563,98	543,13	547,22	546,32
9	605,0	660,59	641,91	649,50	643,45
10	676,0	755,60	743,76	753,36	743,18
11	880,0	847,70	847,50	857,35	844,35
12	995,0	939,95	952,09	-	-
S_a		37,33	31,67	35,38	29,71

Отбросив только одну последнюю точку, получаем новую систему уравнений $l_t = 69{,}90\ (1 - e^{-0{,}091\ (t + 1{,}98)})$ для линейного роста и $W_1 = 2775{,}15\ (1 - e^{-0{,}091\ (t + 1{,}98)})^3$ и $W_2 = 3009{,}31\ (1 - e^{-0{,}076\ (t + 2{,}99)})^3$ для роста массы.

Как видно из табл.3, ошибка аппроксимации несколько уменьшилась. При этом в обоих уравнениях для роста массы изменились значения всех коэффициентов, т.е. результаты расчетов существенно зависят от набора исходных точек. Так как крайние точки обычно ненадежны (для старших возрастов невелика проба, для младших - форма кривой может быть иной), к ним следует относиться осторожно, иногда их приходится отбрасывать.

Так как данные по длине обычно менее вариабельны, чем данные по массе, и поскольку уравнения (5) и (7) логически связаны друг с другом, кажется целесообразным применять уравнение (10). Если же учесть, что уравнения роста нельзя считать строго теоретическими и если рассматривать их только как удобное описание процесса роста, позволяющее аппроксимировать фактические данные по изменению массы или длины, а также поскольку параметры (11) оцениваются методом наименьших квадратов и степень аппроксимации характеризуется ошибкой, рассчитываемой по приведенной формуле, ясно, что степень аппроксимации данных по массе уравнением (11) всегда выше, чем любым другим. Таким образом, следует предпочитать уравнение, непосредственно аппроксимирующее данные по росту массы.

При большом количестве точек $\{l_t, t\}$ оценка L_∞ может оказаться меньше, чем одно-два значения l_t по фактическим данным, но это несущественно, поскольку получаемые оценки параметров - статистические величины.

Рассмотрим два итерационных метода оценки параметров уравнения линейного роста (7'): Томлинсона и Абрамсона (Tomlinson, Abramson, 1961) и Аллена (Allen, 1966). Первый из них пригоден при условии, что между возрастными группами равные промежутки T. Суть заключается в том, что метод наименьших квадратов приводит к системе трех нелинейных относительно k алгебраических уравнений. Эту систему авторы условно рассматривают как систему линейных однородных уравнений с коэффициентами, зависящими от неизвестного параметра k. Решение этой системы существует, если определитель ее равен нулю. Авторы рассчитывают и табулируют специальные полиномы для определения k. Зная k, другие параметры (L_∞ и t_0) можно определить из системы линейных уравнений обычными алгебраическими методами.

Этот метод может быть автоматизирован, но при помощи таблиц, приводимых в указанной работе, можно определить параметры и без помощи ЭВМ.

Авторы предлагают и способ оценки точности параметров, если выборка составлена так, что в разных возрастных группах содержится равное число особей. Если же мы располагаем данными только по средним размерам особей для каждой возрастной группы, оценить параметры можно, но вопрос о точности этих оценок стоять не может.

Ю.Н.Ефимов и Н.М.Игошин (1976) реализовали этот алгоритм на ЭВМ "Минск-22". Метод оказался вполне приемлемым, итерационный процесс быстро сходится на различных первоначальных данных.

<u>Метод Аллена.</u> Уравнение (7') запишем в виде

$$l_t = L_\infty - L_\infty e^{kt_0} \cdot e^{-kt} = \alpha - \beta e^{-kt}, \tag{12}$$

т.е. получаем линейную регрессию l_t по e^{-kt}

при $\alpha = L_\infty$ и $\beta = -L_\infty e^{kt_0}$.

Поскольку k - неизвестный параметр, найти коэффициенты уравнения регрессии в явном виде нельзя. Выражаем α и β через e^{-kt}:

$$\alpha = \frac{\Sigma l_t}{N - e^{kt_0}\Sigma e^{-kt}};$$

$$\beta = \frac{\Sigma l_t \Sigma e^{-kt} - N\Sigma(l_t e^{-kt})}{(\Sigma e^{-kt})^2 - N\Sigma e^{-2kt}}, \tag{13}$$

где N - количество точек.

Минимизация суммы квадратов отклонений от линии регрессии по k приводит к уравнению

$$[N\Sigma e^{-2kt} - (\Sigma e^{-kt})^2][\Sigma l_t \Sigma t e^{-kt} - N\Sigma l_t t e^{-kt}] -$$
$$-(N\Sigma l_t e^{-kt} - \Sigma l_t \Sigma e^{-kt})(\Sigma e^{-kt}\Sigma t e^{-kt} - N\Sigma t e^{-2kt}) = 0, \tag{14}$$

которое решается итерационным методом.

Когда k найден, из уравнения (I3) и учитывая, что $\alpha = -\frac{\beta}{e^{kt_0}}$, можно получить уравнение для расчета e^{kt_0}, а затем и t_0. Оценка L_∞ находится из выражения (I3), поскольку $\alpha = L_\infty$.

Расчеты с использованием ЭВМ показали (Ефимов, Игошин, 1976), что уравнение (I4) имеет не единственное решение. Сходимость итерационного метода существенно зависит от "стартовых" значений k. Все это является недостатками метода Аллена.

Программа для оценки параметров обобщенного уравнения (5) для ЕС I033 составлена Р.В.Доровских (АтлантНИРО). Шифр программы ДР0802. Входные данные - множество $\{W_t, t\}$ и интервал возможных значений (минимальное и максимальное значения) искомых параметров. Кратко опишем алгоритм программы. Экстремум суммы квадратов отклонений как функции f пяти параметров находим следующим образом. В допустимой области значений параметров выбираем M точек, в которых рассчитываем значение функции f. Далее из точки, где значение f наименьшее, ищем экстремум. Затем поиск повторяется с другими M точками. Иногда, особенно при лабораторных условиях, есть ряды наблюдений за приростом одноразмерных особей, а именно:

$$\left\{\left(\frac{\Delta \ell}{\Delta t}\right)_i, \ell_i\right\}.$$

В этом случае удобно применить сравнительно простой метод оценки параметров уравнения (7') Барыбиной (I978). Уравнение (7') в дифференциальной форме запишем как

$$\frac{d\ell^{(t)}}{dt} = kL_\infty e^{-k(t-t_0)} + (L_\infty k - L_\infty k) = L_\infty k - L_\infty k(1-e^{-k(t-t_0)}) = L_\infty k - k\ell(t),$$

или

$$\frac{d\ell}{dt} = \alpha + \beta\ell, \qquad \text{где } \alpha = kL_\infty, \quad \beta = -k.$$

Это обычная линейная регрессия приростов за Δt по длине в начале интервала Δt. Этот метод можно использовать и для данных по средней длине особей возрастной группы.

П р и м е р. В табл. 4 приведены средние приросты для азных возрастных групп капской ставриды, полученные из абл. I.

Т а б л и ц а 4

Приросты длины для капской ставриды

t	$\ell_i(x)$	$\Delta\ell_i(y)$	t	$\ell_i(x)$	$\Delta\ell_i(y)$	t	$\ell_i(x)$	$\Delta\ell_i(y)$
I	I6,7	4,I	5	33,5	2,8	9	44,I	2,I
2	20,8	4,0	6	36,3	3,0	I0	46,I	2,0
3	24,8	3,9	7	39,3	2,4	II	48,I	0,4
4	28,7	4,8	8	4I,7	2,4	I2	48,5	-

Количество точек при этом сократится на единицу, как и в методе Форда-Уолфорда. Величины приростов за год в табл.4 – $\Delta\ell$ – численно равны скорости роста (с точностью до размерности).

Теперь

$$\beta = \frac{\sum x_i y_i - (\sum y_i)\bar{x}}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)\bar{x}} = -0{,}103; \quad \alpha = \bar{y} - \beta\bar{x} = 6{,}458;$$

$$k = -\beta = 0{,}103 \quad \text{и} \quad L_\infty = -\frac{\alpha}{\beta} = 62{,}56.$$

Сравнение с результатами расчетов по программе ДР00402 (метод Хоэндорфа) показывает, что оценки L_∞ совпадают с точностью до второго десятичного знака, оценки k отличаются на 10%. Параметр t_0 можно оценить по той же формуле, что предложена в методе Хоэндорфа, подставив для нашего примера $n = 11$, $p = 1$.

Уравнение Паркера - Ларкина. В основе построения зависимости роста лежит утверждение, что скорость роста скорее является функцией достигнутого особью размера, чем возраста

$$\frac{dw}{dt} = kw^x, \tag{15}$$

где k и x – постоянные параметры, причем $x < 1$.

При $x = 1$ из формулы (15) получается как частный случай уравнение экспоненциального роста.

Интегрирование (I5) приводит к уравнению $W_t^{(1-x)} = (1-x)kt + W_0^{(1-x)}$, а при связи массы с длиной $W = A\ell^B$ линейный рост

$$\ell_t^a = at + \ell_0^a, \qquad (16)$$

где $a = (1 - x) \cdot \dfrac{k}{A^{(1-x)}}$;

$a = B(1 - x)$.

Здесь W_0 и ℓ_0 - значения массы и длины при $t = 0$.

Таким образом, это уравнение не требует ограничения на характер роста; оно одно и то же как для изометрического, так и для аллометрического роста. Удобнее рассматривать уравнение (I6) для двух последовательных лет; по аналогии с уравнением Форда-Уолфорда оно имеет вид $\ell_{t+1}^a = a + \ell_t^a$. В координатах ℓ_t^a, ℓ_{t+1}^a график уравнения - прямая линия, идущая под углом 45° и приподнятая над биссектрисой координатного угла на величину a. Задача состоит в оценке параметров a и a.

Задавая разные значения a, можно найти последовательность линий регрессии, причем каждому a будет соответствовать значение a_a. Эти линии регрессии проводятся очень просто, поскольку угловой коэффициент равен 1.

Покажем, как сделать это, например, для $a = 0{,}5$ (табл.5). В четвертом столбце таблицы приведены значения $x = \ell_t^{0,5}$; значения $y = \ell_{t+1}^{0,5}$ - те же, но сдвинутые на одно число вверх (начинается с 4,56I и кончается 6,964). Понятно, что регрессию y на x можно построить не по I2, а по II точкам.

При $y = a_a + x$ $a_a = \bar{y} - \bar{x}$ (разница математических ожиданий y и x).

Поскольку $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n+1} \ell_t^{0,5}$, а $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1} \ell_t^{0,5}$ и $n = 11$,

$$a_{0,5} = (\ell_n^{0,5} - \ell_1^{0,5}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{11}(6{,}964 - 4{,}086) = 0{,}262.$$

Какую же из этих линий регрессии следует выбрать? Логичнее ту, для которой относительная дисперсия параметра a_a минимальна. Можно, используя ЭВМ и составив специальную программу, этот процесс автоматизировать. Проще же применить следующий метод расчетов, предложенный Паркером и Ларкиным. Предполагается, что зависимость относительного стандартного отклонения оценок параметра a_a

Таблица 5

Пример расчета параметров уравнения Паркера-Ларкина для капской ставриды

Возраст	Длина l_t	a_{1t}	$l_t^{0,5}$	$a_{0,5}$	$l_t^{I,5}$	$a_{I,5}$	$l_t^{2,5}$	$a_{2,5}$	$l_t^{2,05}$
I	I6,7	4,I	4,086	0,475	68,25	26,6I	II39,70	833,44	32I,05
2	20,8	4,0	4,56I	0,4I9	94,86	28,64	I973,I4	I089,74	503,54
3	24,8	3,9	4,980	0,377	I23,50	30,25	3062,88	I349,82	722,I5
4	28,7	4,8	5,357	0,43I	I53,75	40,I5	44I2,70	2082,77	974,22
5	33,5	2,8	5,788	0,237	I93,90	24,8I	6495,47	I443,5I	I337,64
6	36,3	3,0	6,025	0,244	2I8,7I	27,66	7938,98	I743,35	I576,9I
7	39,3	2,4	6,269	0,I89	246,37	22,9I	9682,33	I546,57	I855,68
8	4I,7	2,4	6,458	0,I83	269,28	23,58	II228,9	I686,I	2095,45
9	44,I	2,0	6,64I	0,I49	292,86	20,I5	I29I5,0	I5I4,5	2350,I6
10	46,I	2,0	6,790	0,I45	3I3,0I	20,58	I4429,5	I6I6,3	2573,86
II	48,I	0,4	6,935	0,029	333,59	4,I73	I6045,8	335,6	2808,0
I2	48,5	-	6,964	-	337,76	-	I638I,4	-	2856,07
$\bar{a}_a$		2,89		0,26		24,50		I385,6I	
δ_a		0,433		0,546		0,356		0,346	

$$S_a = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\bar{a}_Q^2}}$$

от Z имеет минимум и примерно описывается параболой

$$S_a \simeq d + bQ + cQ^2. \qquad (17)$$

Для нахождения трех параметров d, b и c для трех пробных значений Q по заданным l_t рассчитывают l_t^Q, $a_{Qt} = l_{t+1}^Q - l_t^Q$, а затем их средние значения $\bar{a}_Q$, стандартное отклонение σ_a и относительное стандартное отклонение $S_a = \frac{\sigma_a}{\bar{a}_Q}$. Взяв пробные значения Q 1,0; 0,5 и 1,5, из системы трех линейных уравнений (линейных относительно параметров d, b, c) типа (17), а именно

$$0{,}433 = d + b + c,$$

$$0{,}546 = d + 0{,}5b + 0{,}25c, \qquad (18)$$

$$0{,}356 = d + 1{,}5b + 2{,}25c,$$

находим значения d, b и c (в данном случае $d = 0{,}695$; $b = -0{,}334$; $c = 0{,}072$). И минимум S_a достигается при $Q_{opt} = -\frac{b}{2c}$, т.е. при $Q_{opt} = 2{,}32$.

Проводим линию регрессии y на x при полученном $Q = 2{,}32$ и получаем оценку $a_{2,32} = 678{,}09$.

Итак, уравнение роста примет вид

$$l_{t+1}^{2,32} = 678{,}09 + l_t^{2,32}.$$

Паркер и Ларкин проводили расчеты для лососевых рыб, и для этих рыб оценки Q лежали в границах $0{,}5 \div 1{,}5$. Поэтому они рекомендовали выбирать в качестве пробных значений Q 0,5; 1,0 и 1,5. Изучая рост других рыб, в частности ставридовых, мы обнаружили, что оптимальное значение Q может выходить из интервала (0,5; 1,5) и иногда даже превышает 3,0. Чтобы точнее аппроксимировать квадратичную параболу $S_a(Q)$, целесообразно выбирать пробные значения Q ($Q_1 < Q_2 < Q_3$) таким образом, чтобы минимум функции S_a лежал между ними, т.е. в интервале (Q_1, Q_3). Потому наш расчет не следует считать окончательным: $Q_{opt} = 2{,}32 > Q_3 = 1{,}5$, следовательно, следует увеличить Q_3 хотя бы до 2,5. Вместо третьего уравнения в системе (18) следует поставить уравнение $0{,}346 = d + 2{,}5b +$

+ 6,25с. В качестве Q_1 и Q_2 можно взять любую пару значений из (0,5; I,0; I,5). При этом различие получаемых оценок Q_{opt} будет во втором десятичном знаке.

Пробные значения Q	Q_{opt}
0,5; I,0; 2,5	2,09
I,0; I,5; 2,5	2,05
0,5; I,5; 2,5	2,05

Выбрав как окончательную оценку $Q = 2,05$, рассчитываем столбец $l_t^{2,05}$ (табл. 5) и получаем $\hat{a} = \frac{2856,07 - 321,05}{11} = 230,46$. Окончательное уравнение роста: $l_{t+1}^{2,05} = 230,46 + l_t^{2,05}$.

2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ СМЕРТНОСТИ

Терминология

В основу определений, необходимых при обсуждении методов оценки коэффициентов смертности, положим термины, приведенные А.В.Засосовым (1976, табл. 14) и Б.Рикером (1979). Они не всегда совпадают, поэтому выберем из них наиболее удачные, с нашей точки зрения.

Коэффициенты смертности подразделяются на мгновенные коэффициенты, коэффициенты убыли и условные коэффициенты смертности. Кроме того, коэффициенты смертности общие могут состоять из коэффициентов естественной смертности (от болезней, хищников, старости, т.е. от разных причин, не связанных с промыслом) и промысловой (вызванной промыслом) смертности.

Мгновенный коэффициент общей смертности. Z – относительная (удельная, пересчитанная на одну особь) скорость смертности от всех причин; смысл ее ясен из уравнения

$$\frac{dN}{dt} = -ZN, \tag{19}$$

где N – численность некоторой группы особей (поколения, популяции).

Таким образом, $Z = -\frac{dN}{N dt}$, (выражается Z в $\left[\frac{1}{t}\right]$). Если элементарный интервал времени Δt принимать за I год, то размерность Z $\left[\frac{1}{\text{год}}\right]$. Следует помнить, что величина Z зависит от выбранного нами интервала времени: если $\Delta t =$ I год и для некоторой популяции $Z = 0,5 \frac{1}{\text{год}}$, то при расчетах с интервалом $\Delta t =$ I мес. $Z = \frac{0,5}{12} \cdot \frac{1}{\text{мес.}} = 0,04$ I/мес.

Решение (I9) имеет вид:

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(0)\, e^{-Z(t-t_0)},$$

где $\mathcal{N}(0)$ – численность этой группы особей в момент $t = t_0$, т.е. $e^{-Z(t-t_0)}$ – доля выживших особей в течение интервала времени длиной $(t - t_0)$. Если этот интервал равен году, доля выживших особей за год равна e^{-Z} и называется годовым коэффициентом выживаемости S.

Коэффициент общей убыли φ – доля особей, умерших от разных причин в течение года от числа живых в начале года. Очевидно, что $\varphi = 1 - S = 1 - e^{-Z}$. Например, при $Z = 0{,}5\ \frac{1}{\text{год}}$, $S = 0{,}607$, $\varphi = 0{,}393$. Понятно, что φ и Z – безразмерные величины.

В табл. I3 работы А.В.Засосова (I976) приведены значения φ для Z, меняющегося от 0,00 до I0,00 через 0,0I.

Мгновенные коэффициенты естественной (М) и промысловой (F) смертности характеризуют относительную скорость смертности от соответствующих причин. При этом $Z = F + M$.

Коэффициенты естественной (φ_M) и промысловой (φ_F) убыли – доля особей, погибших за год от соответствующих причин, от числа живых в начале года. Через мгновенные коэффициенты они выражаются следующим образом:

$$\varphi = \varphi_M + \varphi_F; \quad \varphi_F = \frac{F}{Z}\cdot\varphi = \frac{F}{Z}(1-e^{-Z});$$

$$\varphi_M = \frac{M}{Z}\varphi = \frac{M}{Z}(1-e^{-Z}). \tag{20}$$

Количество погибших за год особей будет при этом равно $N_H\cdot\varphi$ (N_H – численность в начале года), промыслом изъято $N_H\cdot\varphi_F$, умерло от естественных причин $N_H\cdot\varphi_M$.

Эти величины целесообразно называть убылью: общей, промысловой и естественной. И φ_F, и количество погибших за год особей от промысла зависят не только от F, но и от М: при том же F с ростом М меньшая доля особей будет изъята промыслом. И наоборот: при той же естественной смертности М с ростом F возрастает φ_F и уменьшается φ_M, т.е. меньшее количество особей погибнет естественным путем. Поскольку коэффициент промысловой убыли φ_F равен числу взятых промыслом особей (улову), отнесенному к первоначальной численности (запасу) $\varphi_F = \dfrac{C}{N_н}$ его называют еще коэффициентом эксплуатации и часто обозначают буквой E.

Иногда приходится рассчитывать долю умерших особей от естественных причин при условии отсутствия промысла. Эту долю удобно называть "условным коэффициентом естественной смертности ν_M". Аналогично "условным коэффициентом промысловой смертности ν_F" называют долю изъятых промыслом особей (от численности в начале года) при условии отсутствия естественной смертности

$$\nu_F = 1 - e^{-F}; \quad \nu_M = 1 - e^{-M}; \quad \varphi = \nu_F + \nu_M - \nu_M \cdot \nu_F \tag{21}$$

Коэффициенты ν_F и ν_M имеют смысл вероятности гибели от разных причин в течение года, если других причин гибели нет. Поскольку одна особь не может погибнуть сразу от двух причин (от естественных и в результате промысла), вероятность полного события (коэффициент убыли) рассчитывают по закону, описываемому уравнением (21).

А.В.Засосов называет эти коэффициенты "интенсивность естественного вымирания" и "годичная интенсивность вылова" соответственно.

Таким образом, зная величины двух коэффициентов из трех: Z, F и M, все другие коэффициенты смертности и выживания можно выразить через них при помощи приведенных формул.

Обзоры методов оценки параметров Z и M можно найти в разных руководствах (Засосов, 1976; Рикер, 1979; Ефимов, 1980). Ограничимся здесь только анализом некоторых, наиболее употребительных методов.

Методы оценки Z

Если уравнение (19) переписать в виде $\dfrac{dN}{dt} = -Z(t)dt$ и проинтегрировать от $t = 0$ до t, то получим выражение

$$\ln N(t) = \ln N(0) - \int_0^t Z(t)dt. \tag{19}$$

Обозначим через $y = \ln N(t)$ и $a = \ln N(0)$, тогда видно, что (19) представляет собой уравнение прямой линии $y = a - Zt$ на плоскости $\{\ln N(t), t\}$, если Z - постоянная величина. Если мы имеем данные по численности одного поколения рыб в разных возрастах, то можем построить график зависимости $\ln N(t)$ от t, тогда Z на разных участках кривой определяется как тангенс угла наклона (с отрицательным знаком). Если на большом интервале возрастов эта зависимость близка к прямой, то можно утверждать, что на этом интервале $Z = const$.

К сожалению, очень редко можно располагать данными по абсолютной численности. Данные по уловам из разных возрастных групп только тогда могут быть использованы для непосредственного определения Z, когда пополнение промыслового запаса из года в год одно и то же. Это именно тот случай, который в свое время рассматривал Ф.И.Баранов как модель промыслового стада рыб, когда "кривая уловов" совпадает с "кривой населения". Другая возможность - применение вместо численностей возрастных групп их индексов. Широко распространено мнение, что надежным индексом численности является величина улова на единицу усилия. Тогда от возрастного состава уловов следует (через величину промыслового усилия) перейти к таблице возрастного состава уловов на единицу усилия.

Обычно уловы на единицу усилия C_f выражены в весовых единицах (например, в тоннах). Для каждого года по выборкам, по которым определяется возрастной состав, рассчитывают средний вес рыб в уловах - $W_{ср}$. Деля C_f на $W_{ср.}$, получаем среднее для данного года количество рыб, пойманных на единицу усилия (при $f = 1$). Это количество рыб распределяется по возрастным группам согласно известному возрастному составу. Так для каждого года промысла получаем возрастной состав улова на единицу промыслового усилия в штуках - $n_{t,i}$. Тогда для каждого поколения отдельно можно найти Z по формуле

$$Z = -\ln \frac{n_{t+1,\,i+1}}{n_{t,i}}, \tag{22}$$

где i и t - индексы года промысла и возрастной группы.

П р и м е р. Проиллюстрируем используемый метод на примере капской ставриды (табл. 6 и 7). Рассмотрим период лет 1976-1980 гг.

Данные по уловам на усилие для советских судов типа ОТМ-8, взяты из работы Бабаяна и Булгаковой (Babayan, Bulgakova 1984); возрастной состав - из работы Щербич и др. (Sherbitch et al.,1984). В табл. 6 приведен возрастной состав (в штуках на I ч траления), начиная с первой возрастной группы, полностью представленной в уловах ($t = 4$). Возрастные группы $t > 9$ слишком малочисленны, потому их рассматривать не будем. Таким образом, рассматриваем усеченную выборку возрастного состава. Расчеты следует вести по численностям одного и того же поколения в разных возрастах. Одно из поколений выделено в таблице (цифры подчеркнуты). Для годов промысла i = 1976, $i + 1$ = 1977 и t = 4 и 5, например, $Z_{4-5} = -\ln\frac{1389}{3684} = 0{,}98$.

Таблица 6

Возрастной состав уловов на единицу усилия (на I ч траления судов типа ОТМ-8) для капской ставриды района I.3+I.4 ИКСЕАФ; средняя длина рыб по возрастным группам

Год промысла	Улов на час траления, C_f т/ч	Средняя масса в уловах W_{cp}, г	C_f, шт.	Возраст, годы					
				4	5	6	7	8	9
1976	2,13	233	9142	<u>3684</u>	1275	571	411	182	82
1977	2,20	151	14570	2793	<u>1389</u>	572	242	87	16
1978	1,35	204	6618	2131	874	<u>549</u>	264	93	26
1979	1,62	145	11172	1933	994	547	<u>179</u>	34	22
1980	2,13	161	13224	3122	1032	251	304	<u>185</u>	40
$\ell_{cp.t}$, см				28,7	33,5	36,3	39,3	41,7	44,1

Таблица 7

Оценка мгновенных коэффициентов общей смертности по данным табл. 6 для капской ставриды

Годы промысла	Возраст (годы), t				
	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
1976–1977	<u>0,98</u>	0,80	0,86	1,55	2,43
1977–1978	1,16	<u>0,93</u>	0,77	0,96	1,21
1978–1979	0,76	0,47	<u>1,12</u>	2,05	1,44
1979–1980	0,63	1,38	0,59	<u>0</u>	0
$\bar{Z}_t$	0,88	0,90	0,84	1,14(1,52)	1,27(1,69)

При таких расчетах некоторые из оценок Z могут получаться отрицательными. Поскольку, в принципе, $Z \geqslant 0$, заменяем эти оценки нулями. При нахождении средних по годам промысла оценок Z_t для данных возрастных групп иногда отрицательные значения исключают. Это приводит к сильному повышению оценок $\bar{Z}$. В скобках в последней строке табл. 7 приведены такие завышенные оценки:

$$\bar{Z}_{7-8} = \left(\frac{1,55 + 0,96 + 2,05}{3}\right) = 1,52.$$

Имеет смысл учитывать отрицательные оценки Z, заменив их нулями:

$$\bar{Z}_{7-8} = \left(\frac{1,55 + 0,96 + 2,05}{4}\right) = 1,14.$$

Кроме того, что для некоторых возрастных групп, как мы уже убедились, могут получаться отрицательные оценки Z, этот метод имеет и другой недостаток: далеко не всегда оказывается верным предположение о том, что уловы на единицу усилия пропорциональны величине запаса. Это предположение справедливо только в том случае, если рыбы сравнительно равномерно распределяются по акватории и промысел ведется случайным поиском. Если же промысел управляем, то в зависимости от величины запаса и пространственного распределения рыб (величины косяков и т.п.) разное количество судов будет направляться в район промысла и большее число судов – именно в те его подрайоны, где скопления наиболее плотные. И потому даже при больших колебаниях величины запаса улов на единицу усилия будет меняться слабо. Но это общий недостаток всех методов, принимающих c_f за индекс запаса.

Некоторые способы оценки коэффициента Z основаны на получении коэффициента выживания S; из этих методов наиболее универсален и подходит для разного типа выборок (в том числе для так называемых "усеченных" выборок, когда из возрастного состава выделяются некоторые возрастные группы и последняя из них не малочисленна), следующий. Квадрат S выражается как

$$S^2 = \frac{n - (n_0 + n_1)}{n - (n_{k-1} + n_k)}.$$

Здесь n – объем выборки;

n_0 и n_k – соответственно численность самой младшей и самой старшей возрастных групп.

Тогда

$$Z = \frac{1}{2}\left[\ln(n - n_{k-1} - n_k) - \ln(n - n_0 - n_1)\right]. \qquad (22)$$

Пример. Рассмотрим тот же самый пример. Для выделенного поколения $n = 5986$, $n_0 = 3684$, $n_1 = 1389$; $n_к = 185$, $n_{к-1} = 179$, тогда

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{5622}{913} = 0{,}91.$$

Вышеописанные способы оценки основаны на знании возрастного состава уловов на единицу усилия. Поскольку определение возраста для больших выборок – очень трудоемкая задача, иногда удобнее применять оценки, основанные на знании размерного распределения рыб в уловах.

Метод Ф.И.Баранова. Пусть n_1 и n_2 – количество рыб в уловах в размерных группах со средним размером (длиной) l_1 и l_2 соответственно. Предположим, что $Z = const$ на этом интервале и что существует линейная зависимость между длиной рыб и их возрастом $t = rl + a$. Из решения уравнения (19) получаем $\ln n_2 = \ln n_1 - Z(t_2 - t_1)$ или $\ln n_2 = \ln n_1 - Z \cdot r(l_2 - l_1)$.

Тогда

$$Z = \frac{\ln n_1 - \ln n_2}{r(l_2 - l_1)}. \qquad (23)^*$$

Пример. Из последней строки табл. 6 берем $l_{ср.}$ и находим регрессионную связь между t и $l_{ср.}$: $t = 0{,}38 l_{ср.} - 7{,}62$.

Используя значение $r = 0{,}38$, получаем оценки Z для выделенного в табл. 6 поколения:

для $t = 4 - 5$ $Z = 0{,}54$;
$t = 5 - 6$ $Z = 0{,}88$;
$t = 6 - 7$ $Z = 0{,}98$.

Следует иметь в виду, что этот метод можно применять, только если выполняется условие $r = const$, т.е. на линейных участках кривой роста. Конечно, данный пример дан только для иллюстрации расчетов: при наличии возрастного состава улова

---

*Эта формула немного отличается от данной Ф.И.Барановым, но она позволяет оценить величину Z непосредственно.

на усилие следует применять формулу $Z = \frac{\ln n_1 - \ln n_2}{t_2 - t_1}$ и не определять r.

Метод Бивертона и Холта является модификацией метода Баранова, при условии, что линейный рост рыб соответствует уравнению Берталанффи $l_t = L_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)})$.

Пусть l_1 – наименьшая длина рыб, полностью представленных в уловах (ей соответствует возраст t_1). Тогда при $t > t_1$ численность поколения должна меняться по экспоненциальному закону (если $Z = const$): $N_t = N_1 e^{-Z(t-t_1)}$. Средняя длина рыб в уловах выразится как

$$\bar{l} = \frac{F\int_{t_1}^{\infty} N_t l_t\,dt}{F\int_{t_1}^{\infty} N_t\,dt}.$$

Подставив в эту формулу N_t и l_t, получим

$$\bar{l} = L_\infty\left[1 - \frac{Z}{Z+k}\cdot e^{-k(t_1-t_0)}\right].$$

Поскольку $e^{-k(t-t_0)} = \frac{L_\infty - l_1}{L_\infty}$, из предыдущего уравнения можно выразить Z:

$$Z = \frac{k(L_\infty - \bar{l})}{\bar{l} - l_1}. \tag{24}$$

Для определения $\bar{l}$ необходимы данные по возрастному составу уловов до самых старших возрастов; реально эту величину находим так:

$$\bar{l} = \left(\sum_{t_1}^{t_\lambda} n_t \cdot l_{cp\,t}\right) / \sum_{t_1}^{t} n_t,$$

где t_λ – самый старший возраст, встречаемый в уловах.

Расчет же по усеченным выборкам, примеры которых приведены в табл. 6, недопустим: он приводит к занижению $\bar{l}$, т.е. к завышению Z.

Метод Чепмана и Робсона оценки параметра Z основан на теоретико-вероятностном подходе. Полагая, что коэффициент выживания не зависит от возраста и выборка из популяции представительна, авторы получают, что вероятность того, что попавшая в выборку особь имеет возраст X, равна $f(x) = (1 - S)\cdot S^x$. Возрастной состав выборки величиной n представляет собой как бы серию из n наблюдений за случайной величиной x, которая принимает конкретные значения x_1, $x_2 \dots x_n$. Вероятность осуществления сложного события (получения данной выборки) равна

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\dots f(x_n) = (1-\hat{S})^n \cdot \hat{S}^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$\sum_1^n x_i$ обозначается через T. После ряда непростых выкладок можно получить, что $\hat{S}$ определяется по формуле

$$\hat{S} = \frac{T}{n+T-1} = \frac{\bar{t}}{1+\bar{t}-\frac{1}{n}},$$

где $\bar{t}$ – условный средний возраст в уловах, т.е. $t = 0$ присваивается самой младшей полностью представленной в пробе возрастной группе;

T – сумма условных лет, прожитых всеми особями данной пробы:

$$T = n_0\cdot 0 + n_1\cdot 1 + \dots + k\cdot n_k,$$

где n_k – численность возрастной группы с условным возрастом k;

Доказано, что получаемая оценка $\hat{S}$ является несмещенной. Тогда

$$Z = \ln\left(1+\bar{t}-\frac{1}{n}\right) - \ln\bar{t}. \qquad (25)$$

Для расчета по (25) тоже требуется, чтобы пробы были неусеченными.

Методы оценки M

Параметр M особенно важен при построении самых разных моделей промыслового стада. По нашему мнению и мнению других исследователей, оценка M сильно влияет на результирующую оценку биомассы и возможного улова. Например, оценка запаса капской ставриды возрастает более, чем в 10 раз при изменении M от 0,4 до 1,0. Потому любые уточнения методов оценки M и особенно изучение зависимости M от возраста существенно улучшают результаты расчетов запаса и возможного улова.

Величина М для возрастных групп, относящихся к середине жизненного цикла рыб, является специфичной для популяции. Поскольку же эти возрастные группы составляют основу промысловых уловов (младшие возрастные группы почти не попадают в уловы благодаря селективности орудий лова, а самые старшие малочисленны), часто принимается предположение $M = const$, сильно упрощающее математические модели популяции.

Случай, при котором коэффициент М не зависит от возраста

Если мы имеем дело с необлавливаемой популяцией или промысел ее только что начат, можно считать, что ее возрастной состав еще не изменился под действием промысла, тогда вышеперечисленные методы оценки Z пригодны для оценки М ($M = Z$). Правда, если промысел популяции только начат, то где взять многолетние данные по возрастному составу популяции? С другой стороны, если в настоящее время промысел ведется в широком масштабе, но есть данные за первые годы промысла, то можно попытаться по ним оценить М. Но при этом следует помнить, что при интенсивном промысле изменились и условия жизни популяции (особи стали быстрее расти и созревать, а, возможно, изменилось также и ближайшее окружение популяции в экосистеме), которые скорее всего повлияли на величину М.

Есть ряд методов, позволяющих, имея данные о Z и промысловом усилии f за ряд лет, выделить из Z естественную смертность М. Поскольку $F = qf$, где q - коэффициент улавливаемости (см. следующий раздел), то $Z_i = M + qf_i$. Линейная регрессия Z на f позволит оценить параметры М (отрезок, отсекаемый прямой на оси Z) и q (тангенс угла наклона прямой). Для получения достоверного результата необходимо, чтобы промысловое усилие менялось в широких пределах в течение исследуемого периода.

Метод Силлимана. В частности, если мы располагаем двумя устойчивыми периодами промысла с существенно различными значениями f, то величину М (и одновременно q) можно найти из двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1 &= qf_1 + M \\ Z_2 &= qf_2 + M \end{aligned} \qquad (26)$$

Тогда $q = \dfrac{z_2 - z_1}{f_2 - f_1}$ и $M = z_1 - q f_1$.

Эти два метода оценки М и одновременно проиллюстрированы на примере окуня-клювача Ванкуверского района в следующем разделе.

Метод Бивертона и Холта. Строго говоря, определение z по формуле $z = \ln \dfrac{n_{ti}}{n_{t+1,\,i+1}}$, если n_{ti} характеризует собой возрастной состав уловов на единицу усилия, неточно. Величина C_f варьирует в течение года, как и величина запаса, и в расчеты мы закладываем на самом деле среднегодовую величину $\bar{C}_f$. А $\bar{C}_f$ в свою очередь является индексом средней за год численности запаса $\bar{N}$.

Пусть в i-м году для выбранного поколения средняя численность t-й возрастной группы равна $\bar{N}_{ti}$

$$\bar{N}_{t,i} = \frac{N_{ti}}{F_i + M} \cdot \left[1 - e^{-(F_i + M)}\right].$$

Через год особи этой возрастной группы будут иметь возраст $(t + 1)$, и их средняя численность будет равна

$$\bar{N}_{t+1,\,i+1} = \frac{N_{ti}\, e^{-(F_i + M)}}{F_{i+1} + M} \cdot \left[1 - e^{-(F_{i+1} + M)}\right],$$

здесь N_{ti} – численность i-й группы в начале года t. При делении первого уравнения на второе имеем

$$\frac{\bar{N}_{ti}}{\bar{N}_{t+1,\,i+1}} = \frac{F_{i+1} + M}{F_i + M} \cdot \frac{\left[1 - e^{-(F_i + M)}\right]}{\left[1 - e^{-(F_{i+1} + M)}\right]} \cdot e^{(F_i + M)}.$$

Логарифмируя полученное выражение, получаем, имея в виду, что $F_i = q f_i$

$$(q f_i + M) = \ln\left[\frac{\bar{N}_{ti}}{\bar{N}_{t+1,\,i+1}}\right] + \ln\left[\frac{(q f_i + M)(1 - e^{-(q f_{i+1} + M)})}{(q f_{i+1} + M)(1 - e^{-(q f_i + M)})}\right]. \qquad (27)$$

Можно считать, что для данной возрастной группы параметры q и М постоянные величины, т.е. не меняются во времени. Видим, что (27) представляет собой трансцендентное уравнение относительно q и М, которое переходит в уравнение

$$(q f_i + M) = \ln \frac{\bar{N}_{ti}}{\bar{N}_{t+1,\,i+1}}, \qquad (28)$$

только если $f_i = f_{i+1}$.

Бивертон и Холт предлагали решать уравнение (27) методом последовательных приближений. В качестве первого приближения можно взять значения M_1 и q_1, полученные при построении линии регрессии (28) ${}_{(1)}z_i$ по f_i для ряда лет i. Подставив значения M_1 и q_1 в правую часть (27), получаем новые значения ${}_{(2)}z_{t_i}$ и затем строим новую линию регрессии ${}_{(2)}z_{t_i}$ по f_i - получаем M_2, q_2. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока изменения оценок M и q при переходе к следующему приближению не будут менее заранее заданного нами числа. Если это число, например, 0,1, то по утверждению А.В.Засосова (1976), достаточно всего двух-трех итераций.

Но практическое использование метода выявило его недостатки (Доровских, 1981): иногда вычислительный процесс расходится, а иногда получаются неправдоподобные оценки коэффициентов (например, M<0). Предлагается применять другой метод решения. Обозначим слагаемое правой части уравнения (27) через y_i и u_i :

$$y_i = \ln\left[\frac{\bar{N}_{t\,i}}{\bar{N}_{t+1,\ i+1}}\right] \text{ и } u_i = \ln\left[\frac{(qf_i+M)(1-e^{-(qf_{i+1}+M)})}{(qf_{i+1}+M)(1-e^{-(qf_i+M)})}\right]$$

и перепишем (27) в форме

$$y_i = (qf_i + M) - u_i \qquad (29)$$

Поскольку u_i - нелинейная функция f_i, то ставится задача поиска параметров уравнения нелинейной регрессии y_i по f_i. При этом ищутся такие значения M и q, которые минимизируют сумму квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{p_i})^2$, где y_i - "наблюденные" значения функции, найденные через отношение численностей, а y_{p_i} "расчетные", полученные при вычислении правой части (29) для заданных M и q.

Алгоритм реализован Р.В.Доровских на языке ФОРТРАН в виде программы ДР2ДII (АтлантНИРО).

Рассмотрим еще четыре метода оценки M, которые можно назвать физиологическими методами, поскольку они используют не данные по возрастному составу, а специфические параметры популяции.

Метод Алверсона-Карни. Полагая, что рост особей изометричен и описывается уравнением Берталанфи и что M = const, можно найти возраст T_{mb}, при котором в случае отсутствия промысла биомасса поколения достигает максимума. Если P_t – биомасса поколения в возрасте t, то

$$P_t = N_0 e^{-Mt} \cdot W_\infty (1-e^{-kt})^3.$$

Значение t, при котором функция P_t достигает максимума, и есть T_{mb}. Отсюда получается связь между параметрами T_{mb}, M и k:

$$T_{mb} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{M+3k}{M}\right) \quad \text{или} \quad M = \frac{3k}{e^{T_{mb} \cdot k} - 1}. \qquad (30)$$

Найти T_{mb} можно через максимальный возраст популяции T_m. Если T_m – возраст самой старшей группы в уловах, составляющей от величины выборки не менее 0,5%, то $T_{mb} = 0{,}38\,T_m$, если же T_m – максимальный возраст рыб, встреченных в неэксплуатируемой популяции, то $T_{mb} = 0{,}25 \cdot T_m$. При использовании этого метода следует иметь в виду, что формула (30) получена при условии, что параметр уравнения Берталанфи $t_0 = 0$, т.е. кривая роста проходит через начало координат. Если методом наименьших квадратов искать не три параметра, как делается обычно, а два (L_∞ или W_∞ и k), то параметр k, входящий в формулу (30), будет иным.

По данным Венгжинь (Wengrzyn, 1976), для капской ставриды максимальный наблюдаемый возраст – 18 лет, т.е. $T_{mb} = 0{,}25 \cdot 18 = 4{,}5$. Параметр $\hat{k}$, полученный методом Барыбиной, равен 0,103. Следовательно, $\hat{M} = \dfrac{0{,}309}{e^{4{,}5 \cdot 0{,}103} - 1} = 0{,}52.$

<u>Метод Рихтера и Ефанова</u>. При отсутствии других данных следует применять эмпирическую зависимость между M и возрастом массового полового созревания $t_п$ для рыб с различной длительностью жизненного цикла

$$M = \frac{1{,}521}{t_п^{0{,}720}} - 0{,}155. \qquad (31)$$

В личной беседе В.Н.Ефанов уточнил, что $t_п$ – возраст, при котором 70% рыб созревает; это уточнение существенно, поскольку оценка M из формулы (31) чувствительна к оценке $t_п$, например, при $t_п = 2{,}5$ $\hat{M} = 0{,}63$, а уже при $t_п = 3$ $\hat{M} = 0{,}53$.

<u>Метод Паули</u> устанавливает регрессионную связь между M, двумя параметрами уравнения роста Берталанфи и температу-

рой окружающей среды. По данным для 175 рыбных популяций выведена следующая формула

$$\lg M = -0,0066 - 0,279 \lg L_\infty + 0,6543 \lg k + 0,4634 \lg T^o. \quad (32)$$

Для пелагических рыб T^o - температура поверхностного слоя воды. Например, среднегодовая температура поверхности воды в районе Намибии, где обитает капская ставрида, равна 16^o. Подставляя это значение вместе с вычисленными ранее L_∞ и k в формулу (32), получаем $M = 0,27$.

Метод Гундерсона представляет собой эмпирическую зависимость M от индекса гонад GI, равного отношению массы гонад самки к массе ее тела без внутренностей перед самым нерестом у особей тех размерных или возрастных групп, которые по меньшей мере на 90% состоят из половозрелых рыб. Зависимость имеет вид

$$M = 4,64\,GI - 0,37. \quad (33)$$

Ю.А.Комаров (1969) показал, что у капской ставриды индекс гонад GI достигает 0,18, откуда $M = 0,47$.

Таким образом, разброс полученных для капской ставриды разными методами оценок M довольно широк - от 0,27 до 0,63 для одной и той же популяции. К сожалению, нет объективного критерия для выбора одной из них, и можно предложить принять в качестве окончательной арифметическую среднюю из полученных оценок.

Случай, при котором коэффициент M зависит от возраста

Использование в математических моделях постоянного не зависящего от возраста коэффициента естественной смертности - одно из их слабых мест и служит поводом для справедливой критики биологов.

Одним из первых пытался строить зависимость M от t для ряда конкретных популяций П.В.Тюрин (1972). Поскольку его метод, хоть и не лишенный недостатков, нашел много последователей, остановимся на нем более подробно.

При $M = const$ уравнение Баранова для численности неэксплуатируемого поколения на полулогарифмическом графике имеет вид прямой

$$\ln \mathcal{N}(t) = \ln \mathcal{N}(0) - M(t - t_0),$$

где $\mathcal{N}(t)$ и $\mathcal{N}(0)$ - численности поколения в возрасте t и t_0.

П.В.Тюрин, строя "кривую населения" на полулогарифмическом графике для реальных популяций, получил существенное отклонение от прямой линии. Полученные им зависимости $\ln \mathcal{N}(t)$ имеют вид S-образной кривой с точкой перегиба, приходящейся на возраст массового полового созревания особей. Точка перегиба "кривой населения" соответствует минимуму функции смертности $M(t)$ в зависимости от возраста. То, что этот минимум приходится на возраст полового созревания, биологически оправдано, поскольку в средних возрастах особи наиболее жизнеспособны. На ранних стадиях развития обычно смертность наибольшая. При старших возрастах смертность тоже увеличивается, поскольку при старении ослабляются многие жизненные функции рыб.

Один из интересных результатов Тюрина - „кривые населения" разделились на две группы: популяции, в которых родители проявляют заботу о потомстве (млекопитающие), и популяции, в которых родители не проявляют заботу о потомстве (деревья и многие рыбы). Для второй группы популяций левая ветвь кривой $\ln \mathcal{N}(t)$, характеризующая смертность младших возрастных групп, падает более круто.

Тюрин предложил способ определения зависимости $\varphi_M(t)$ для малооблавливаемых популяций, основываясь на идее Ф.И.Баранова о связи средней величины смертности популяции с предельным возрастом жизни. Изложим коротко смысл этой идеи. Кривая населения описывается убывающей геометрической прогрессией со знаменателем, равным выживаемости за год S, если $S = const$. Баранов в своих расчетах полагал, что убыль особей из популяции происходит главным образом за счет промысловой смертности. Тюрин, рассматривая малооблавливаемые популяции, полагал, что S - общая убыль. Принцип же расчета таблиц (убывание численностей возрастных групп по геометрической прогрессии) остался тем же, и Тюрин использовал таблицы Баранова, расширив их - увеличив размер проб на несколько порядков. Тюрин ввел понятие теоретического предельного возраста ТПВ - это возраст, который был бы представлен одной особью в пробе 1000 экз., если бы наименьшее значение убыли φ ($S = 1 - \varphi$) в возрасте $t_П$ было бы присуще и всем более старшим возрастным группам. Очевидно, что в реальных пробах максимальный возраст (фактический предельный возраст по Тюрину) всегда меньше ТПВ.

Тюрин построил логарифмическую номограмму связи между ТПВ рыб, соответствующим ему значением убыли в средних возрастах и величиной пробы. С помощью этой номограммы можно находить φ в возрасте $t_п$, если известен ТПВ. В этом пункте обнаруживается первый недостаток метода: при всех четких обоснованиях определения φ по ТПВ получаем произвольную величину φ, поскольку величина ТПВ находится произвольно. Второй этап расчетов, предлагаемый Тюриным, - построение кривой $\varphi(t)$, в основе которой лежат три точки: $\varphi(t_п)$, найденная на первом этапе расчетов, φ = 0,95 на первом году жизни и максимальное значение $\varphi = 1$ при фактическом предельном возрасте. Итак, левая ветвь функции $\varphi(t)$ тоже строится произвольно. На эти недостатки метода Тюрина указывает и В.Л.Третьяк (1983).

Таким образом, метод Тюрина следует применять осторожно. С его помощью можно получить только примерную зависимость $\varphi(t)$, а потом, если нужно, рассчитать зависимость $M(t)$. Но в связи с тем, что построение зависимости смертности от возраста всегда сложно, нельзя отказываться и от такой возможности. Как для метода Тюрина, так и для других описываемых далее методов, главная задача - найти для нескольких t достоверные значения М. Особенно важно найти минимальное значение М. Нам кажется, что уже можно с уверенностью сказать, что минимум М достигается при $t = t_п$, причем обычно этот минимум не слишком острый, потому неточность оценки $t_п$ несильно влияет на вид функции. Отдельные значения М следует находить методами, основанными на возрастном составе популяции. Через эти точки проводят кривую $M(t)$, вид которой выбирают заранее.

Для построения левой ветви функции $M(t)$ А.С. Соколовский (1973) предлагает эмпирическую зависимость численности молоди от возраста (при условии постоянства пополнения) в виде

$$N(t) = A \cdot t^{-n}, \tag{34}$$

где A и n - константы. Отсюда

$$\ln N(0) = \ln A - n \ln t_0;$$
$$\ln N(t_1) = \ln A - n \ln t_1,$$

т.е. зная два значения численности при разных возрастах, можно построить всю кривую населения молоди. Заметим, что из формулы (34) вытекает

$$\frac{dN}{dt} = -nAt^{n-1} = -N_t \cdot \frac{n}{t},$$

т.е. $M(t) = \frac{n}{t}$ - гиперболическая зависимость естественной смертности от возраста, для определения ее достаточно на крайний случай одной точки $M_i(t_i)$.

Рассмотрим три зависимости, позволяющие построить обе ветви кривой $M(t)$.

Возрастной состав популяции (кривую населения) можно аппроксимировать функцией вида (Гулин и Руденко, 1973)

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}}. \qquad (35)$$

Обоснованность применения этой функции с точки зрения теории вероятности авторами не доказывается, хотя они и ссылаются на использование ими закона Вейбулла; поэтому будем считать, что это просто эмпирическая формула, описывающая процесс смертности. Параметры λ_1, α_1 и λ_2, α_2 находят методом наименьших квадратов по численности наиболее надежных возрастных групп. Поскольку $M(t) = -\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N(t)}$ при $F \simeq 0$, формула для кривой смертности имеет вид

$$M(t) = \lambda_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2 t^{\alpha_2 - 1}, \qquad (36)$$

где $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 1$, первое слагаемое описывает левую, а второе - правую ветвь кривой.

Применение принципа теории автоматического управления для описания процесса смертности рыбных популяций позволяет получить выражение для коэффициента естественной убыли (Блинов, 1977)

$$\varphi_M = [1 - A[exp(-Bt) - exp(-ct)]]. \qquad (37)$$

Это уравнение имеет три неизвестных параметра A, B и C, причем должно выполняться условие $B < C$. Если известны хотя бы три надежные точки $\varphi_M(t_i)$, то можно найти параметры (37), хотя процесс их поиска связан с громоздким решением трансцендентных уравнений. Формула (38) удобнее для практических расчетов $M(t)$, хотя она и является эмпирической (Третьяк, 1983):

$$M(t) = a[-t - (t_e - t_n) \ln(t_e - t)] + b, \qquad (38)$$

где a и b - искомые параметры, причем $a > 0$;

t_e - максимальный возможный возраст популяции, до которого могут дожить отдельные особи в данных экологических условиях.

Минимум функции (38) соответствует возрасту $t_п$.

Обычно методы оценки $M = const$ позволяют определить M_c для некоторого интервала возрастов $[t_1, t_2]$. Можно считать, что оно равно среднему значению $\bar{M}$ на этом интервале (на самом деле оно будет равно средневзвешенному значению М на интервале):

$$\bar{M} = \frac{1}{t_2 - t} \cdot \int_{t_1}^{t_2} M(t)\,dt.$$

Интегрировать функцию $M(t)$ несложно, и приравняв $M_c = \bar{M}$, получим

$$M_c = b - \frac{a}{2}(t_2 + t_1) + a\frac{t_e - t_n}{t_2 - t_1}\left[(t_e - t_2)\ln(t_e - t_2) - (t_e - t_1)\ln(t_e - t_1) + (t_2 - t_1)\right].$$

Поскольку t_e, $t_п$, t_1 и t_2 – известные заранее величины, получено очень простое равенство, линейное относительно искомых параметров a и b : $b - aC - M_c = 0$, т.е. достаточно, например, двух таких интервалов для однозначного определения параметров. Третьяк успешно применил свой метод к аркто-норвежской треске.

Итак, для построения обоих ветвей зависимости $M(t)$ можно воспользоваться методами Третьяка, Блинова или Гулина, поскольку их формулы описывают всю кривую. Если же перед нами стоит только определенная цель – оценка возможного улова, то часто нам бывает достаточно построить только правую ветвь кривой. Этого, конечно, недостаточно для короткоцикловых рыб, эксплуатация которых начинается при $t < t_п$. Если же известно, что к промысловому запасу относятся особи половозрелые (при $t \geq t_п - 1$, поскольку минимум обычно пологий и мы можем на I год назад экстраполировать полученную функцию), то можно воспользоваться довольно простыми методами.

Как показали наши расчеты для популяции орегонской мерлузы (Булгакова, Ефимов, 1982), введение в модель промысловой популяции функции $M(t)$ существенно влияет на оценку возможного улова. Но при этом выбор аппроксимирующей функции мало влияет на окончательные оценки улова.

Рассмотрим два вида аппроксимирующих функций. Наиболее простой является квадратичная парабола с вертикальной осью, проходящей через $t = t_п$: $M(t) = A_1 t^2 + B_1 t + x_1$, где A_1, B_1 и x_1 – константы. Поскольку минимум кривой должен проходить через $t_п$, то $B_1 = -2A_1 t_п$, т.е. функция принимает вид

$$M(t) = A_1 t^2 - (2A_1 t_п)t + x_1. \tag{39}$$

Остается только два неизвестных параметра (A_1 и x), которые определяем методом наименьших квадратов, минимизируя выражение

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - A_1 t_i^2 + 2A_1 t_n \cdot t_i - x_1)^2.$$

В результате получаем формулы для вычисления параметров A_2 и x :

$$A_2 = \frac{nD_1 - (\Sigma M_i)\cdot D_2}{nD_3 + D_2^2}; \qquad x_1 = \frac{\Sigma M_i}{n} + \frac{D_2}{n}\cdot A,$$

где $D_1 = 2t_n(\Sigma M_i t_i) - \Sigma(M_i t_i^2);$

$D_2 = 2t_n \Sigma t_i - \Sigma t_i^2;$

$D_3 = 4t_n \Sigma t_i^3 + 4t_n^2 \Sigma t_i^2 - \Sigma t_i^4;$

n – количество аппроксимируемых точек.

Вторая аппроксимирующая функция имеет вид

$$M(t) = A_2 + B_2 t^{x_2}, \tag{40}$$

где A_2, B_2 и x_2 – положительные константы, причем $x_2 > 1$.

Параметры этого уравнения определяются следующим образом. Сначала выбирают три точки графика (t_1, M_1), (t_2, M_2) и (t_3 , M_3), причем первые две произвольно, а третья так, чтобы выполнялось равенство $t_3 = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$. Из уравнения (40) получаем три уравнения типа $M_k = A_2 + B_2 t_2^{x_2}$ (k = I, 2, 3). Составив произведение первых двух, после несложных преобразований получаем оценку параметра A_2: $A_2 = \frac{M_1 M_2 - M_3^2}{M_1 + M_2 - 2M_3}$. Зная A_2 , получаем параметры B_2 и x_2 из следующего уравнения регрессии

$$\ln(M - A_2) = \ln B_2 + x_2 \ln t.$$

П р и м е р. Точки М(t_i) получены на основе траловых съемок в двух районах обитания орегонской мерлузы в 1965 г. до начала интенсивного промысла, данные взяты из работы Ю.К.Ермакова (1970), сгруппированы по возрастам и районам и приведены в табл. 8. Здесь же рассматриваются рассчитанные по этим данным и по формуле (22) значения М; t_n = 4. Определены параметры зависимости (39), и уравнение имеет вид

$$M(t) = 0{,}02t^2 - 0{,}16t + 0{,}383.$$

Для определения параметров уравнения (40) выбираем точки t_1 = 4,5 (M_1 = 0,I4), t_2 = 9,5 (M_2 = 0,43) и $t_3 = \sqrt{4{,}5\cdot 9{,}5}$ = 6,54 ≃ 6,5 ($M_3(6{,}5)$ = 0,2I). При этом $A_2 = \frac{0{,}14\cdot 0{,}43 - 0{,}21^2}{0{,}57 - 0{,}42}$ = 0,I3. Далее проводим линию регрессии, и уравнение (40) приобретает вид $M(t) = 1{,}32\cdot10^{-5}\cdot t^{4,49} + 0{,}13$.

Таблица 8

Изменение естественной смертности орегонской мерлузы с возрастом

Возраст	Район			
	Вашингтоно-Орегонский		Ванкуверский	
	численность, шт.	M(t)	численность, шт.	M(t)
4	113	0,14	-	-
5	98	0,15	-	
6	84	0,36	265	0,21
7	59	-	215	0,30
8	-	-	158	0,27
9	-	-	120	0,43
10	-	-	78	0,96
11		-	30	0,51
12	-	-	18	2,20
13			2	

Интересно отметить, что функция (40) совпадает со вторым слагаемым формулы Гулина и Руденко, и эта функция оказалась более универсальной, чем (39): при попытках рассчитать $M(t)$ для окуня-клювача того же района оказалось, что параболой данные аппроксимировать не удается - минимум функции получался отрицательным. Функция же (40) хорошо аппроксимирует данные и по естественной смертности окуня. Рис. 1 иллюстрирует полученные аппроксимации кривой смертности для орегонской мерлузы.

Физиологическим по сути является метод, разработанный В.М.Борисовым (1974), позволяющий построить зависимость ϑ_M от возраста по физиологическим показателям состояния особей разных возрастных групп. Выбран "энергетический показатель" состояния рыб - отношение массы сухого остатка (СО) к массе воды (В) в теле рыб. Возрастные группы с низкими показателями $\alpha = (СО/В)$ более подвержены гибели от истощения. Показатель α растет у младших групп, достигает максимальной величины примерно в возрасте половозрелости и затем падает. Потому для каждой возрастной группы оценивается доля истощенных рыб, показатель α для которых менее выбранного предела

α_{min}. Доля истощенных рыб и принимается за коэффициент естественной убыли этой возрастной группы. За нижний допустимый предел энергетического показателя (α_{min}) принята минимальная доверительная граница этого показателя в самой благополучной возрастной группе, т.е. при $t = t_п$. Итак, особи, у которых $\alpha < \alpha_{min}$, условно относятся к группе истощенных. Расчеты этим методом следует проводить только для правой ветви зависимости $\varphi_M(t)$; в младших возрастных группах, по-видимому, существует свой оптимум величины α.

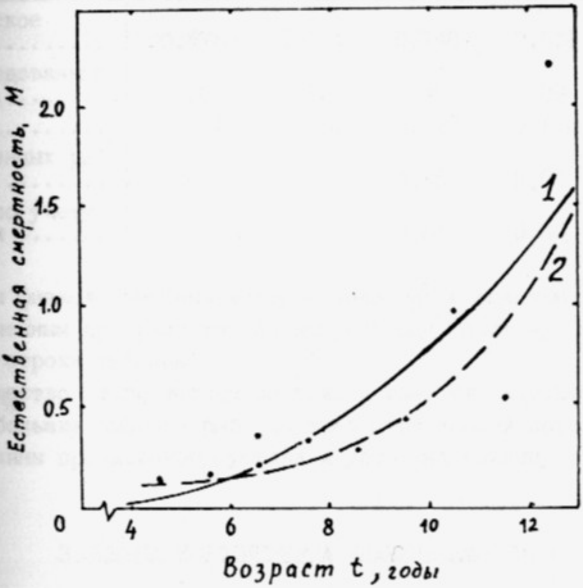


Рис. I. Зависимость коэффициента М от возраста для орегонской мерлузы:
1 - аппроксимация уравнением (39); 2 - уравнением (40); • - точки, рассчитанные по возрастному составу выборок

П р и м е р. Данные по оценке $\alpha = \frac{CO}{B}$ для азовской тюльки сведены в табл. 9. Возрастная группа, для которой α максимально —2^+ (это возраст полового созревания тюльки).

α_{min} рассчитывается как нижняя граница доверительного интервала математического ожидания для группы 2+: $\alpha_{min} = \bar{\alpha}_{2+} - t_{0,95} \cdot S_{\bar{\alpha}}$, где $t_{0,95}$ - показатель Стьюдента для доверительной вероятности 0,95, $t_{0,95} = 2,02$ для $n = 40$; $S_{\bar{\alpha}}$ - среднее квадратическое отклонение оценки математического ожидания: $S_{\bar{\alpha}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,129}{\sqrt{40}} =$ $= 0,02$. Таким образом, $\alpha_{min} = 0,748 - 2,02 \cdot 0,02 = 0,71$.

Таблица 9

Изменение энергетического показателя α = CO/B у тюльки в августе 1971 г. (по данным В.М.Борисова)

Показатели	Возраст,				
	0+	1+	2+	3+	4+
Математическое ожидание $\bar{\alpha}$	0,476	0,674	0,748	0,671	0,539
Число исследованных особей n	30	41	40	29	12
σ	0,061	0,093	0,129	0,132	0,071
Доля истощенных рыб (φ_M)	–	–	0,45	0,83	0,92
Оценка φ_M по учету численности	–	–	0,64	0,80	0,92

Расчеты физиологическим методом приводят к оценкам φ_M, близким к полученным при расчете по возрастному составу численности (последняя строка таблицы).

Преимущество этого метода состоит в том, что изучаются сравнительно небольшие выборки рыб, не требуется знаний возрастного состава, величины промыслового усилия и улова на единицу усилия.

3. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА УЛАВЛИВАЕМОСТИ

Для определения величины запаса по данным улова на усилие из соотношения $C_f = q\bar{N}$ или перехода от мгновенных значений коэффициента промысловой смертности F к фактическим величинам промыслового усилия f, связанными между собой соотношением $F = qf$, необходимо знать коэффициент улавливаемости q.

Первый способ (метод Лесли) основан на использовании зависимости

$$\frac{C_t}{f_t} = q \cdot N_t , \quad (41)$$

где N_t - средняя величина популяции в течение рассматриваемого промежутка времени.

В любой момент времени t, величина популяции будет равна разнице начальной численности N_0 и накопленного улова k_t: $N_t = N_0 - k_t$. Из этих двух уравнений имеем:

$$\frac{C_t}{f_t} = qN_0 - qK_t. \tag{42}$$

Это выражение показывает, что величина улова на усилие в зависимости от накопленного улова представляет собой прямую линию, а наклон ее - величину q.

Другой способ (метод ДеЛури) основан на таком же подходе, как и в первом случае, однако здесь используется зависимость между уловом на усилие и накопленным промысловым усилием. Переписав уравнение (42) в виде:

$$\frac{C_t}{f_t} = qN_0 \left(\frac{N_t}{N_0}\right)$$

и, прологарифмировав его, получаем:

$$\ln (C_t/f_t) = \ln (qN_0) + \ln (N_t/N_0).$$

Отношение N_t/N_0 представляет собой долю запаса, оставшуюся после того, как было затрачено E_t единиц промыслового усилия. Если доля запаса, вылавливаемая единицей усилия, незначительна, то величину N_t/N_0 можно выразить через экспоненту: $N_t/N_0 = e^{-qE_t}$. Подставив это выражение в предыдущую формулу, имеем:

$$\ln(C_t/f_t) = \ln(qN_0) - qE_t, \tag{43}$$

что также представляет собой уравнение прямой линии.

Следует отметить, что изложенные методы можно использовать для вычисления коэффициента q для разных интервалов времени, однако при расчетах следует иметь в виду, что значительные колебания в величине средней численности N_t, пополнения и естественной смертности в рассматриваемые годы промысла могут привести к смещению оценки. Эти методы больше подходят для оценки величины коэффициента улавливаемости для относительно коротких временных интервалов, например, для одного года промысла или для анализа изменения величины q в течение промыслового сезона.

Существует группа методов для оценки величины q, основанная на связи между мгновенным коэффициентом промысловой или общей смертности с промысловым усилием. К. Аллен предложил следующий способ определения q:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \qquad (44)$$

где $\sum_{i=1}^{n} F_i$ - суммарный коэффициент промысловой смертности за рассматриваемый период промысла;

$\sum_{i=1}^{n} f_i$ - суммарная величина промыслового усилия за тот же промежуток времени.

Другой способ определения q основан на построении графической зависимости коэффициента общей смертности от среднего значения промыслового усилия, исходя из соотношения $Z = M + F$, или

$$Z = M + qf. \qquad (45)$$

В самом простейшем случае, строя регрессию Z на f по многолетним данным, можно получить оценку M и q.

Использовав этот же подход, Ж.Палохеймо предложил несколько другой способ оценки:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{Z} - M)}{\sum_{i=1}^{n} \bar{f}}, \qquad (46)$$

где $\bar{Z}$ - средний коэффициент общей смертности двух соседних лет промысла Z_i и Z_{i+1};

$\bar{f}$ - средняя величина промыслового усилия тех же лет;

M - коэффициент естественной смертности.

Рассмотрим применение изложенных способов на данных конкретного промысла.

П р и м е р. Используя данные по улову и затраченному промысловому усилию орегонской мерлузы (Ефимов, 1980), составим табл. 10. При этом будем иметь в виду, что данные по улову и усилию нельзя округлять (например, до тысяч или миллионов тонн), поскольку тогда оценка будет иметь другой порядок. Столбцы накопленного улова k_t и накопленного промыслового усилия E_t рассчитываются следующим образом. В первый год промысла величина накопленного улова будет составлять половину улова текущего года. В следующем году она будет складываться из улова предыдущего года плюс половина улова текущего года. Например, накопленный улов в 1967 г. составит улов 1966 г. плюс половину улова 1967 г., 1968 г. - улов 1966 г. плюс улов 1967 г. плюс половина улова 1968 г. и т.д. Точно так же вычисляется накопленное промысловое усилие.

Таблица I0

Таблица исходных данных для расчета коэффициента улавливаемости методами Аллена и Палохеймо

Год промысла	Улов C_t, т	$C_t/2$	Накопленный улов k_t, т	Промысловое усилие f_t/ч траления	$f_t/2$	Накопленное усилие E_t, ч траления	Улов на усилие C_t/f_t, т/ч траления	$\ln(C_t/f_t)$
1966	I33600	66800	66800	7I400	35700	35700	I,87	0,63
1967	I80000	90000	223600	I5I300	75650	I47050	I,I9	0,I7
1968	I07800	53900	367500	72400	36200	258900	I,49	0,40
1969	I7I800	85900	507300	54000	27000	322I00	3,I8	I,I6
1970	I7I300	85600	678800	285500	I42750	49I850	0,60	-0,5I
197I	I83I00	9I600	856I00	37900	I8950	653550	4,83	I,57
1972	II9600	59800	I007400	69500	34750	707250	I,72	0,54
1973	I63500	8I800	II49000	I57200	78600	820600	I,04	0,04
1974	205800	I02900	I333600	65I00	32550	93I750	3,I6	I,I5
1975	207600	I03800	I540300	78300	39I50	I003450	2,65	0,97
1976	235900	II8000	I762I00	70200	35I00	I077700	3,36	I,2I

На основании табл. I0 могут быть получены оценки q по уравнениям (42) и (43). Расчеты можно производить на настольном калькуляторе или на ЭВМ, используя для этого программу ПРА-2Ф.

Результаты расчетов в нашем примере дают следующие результаты: по формуле (42):

$$C_t/f_t = 1{,}27 - 9{,}46 \cdot 10^{-6} \cdot K_t \qquad (q = 9{,}46 \cdot 10^{-6});$$

по формуле (43):

$$\ln(C_t/f_t) = 0{,}39 - 5{,}55 \cdot 10^{-6}\, E_t \qquad (q = 5{,}55 \cdot 10^{-6}).$$

Для расчетов методами Аллена и Палохеймо составим табл. II, в которую вошли значения промыслового усилия из табл. I0 и рассчитанные ранее значения мгновенного коэффициента общей смертности хека Z_i (Ефимов, 1980). Столбцы значений F_i и $(\bar{Z} - M)$ рассчитываем вычитанием из величины общей смертности значения коэффициента естественной смертности (в нашем примере М = 0,45).

Дальше по уравнениям (44) и (46) рассчитываем значения q : q = 4,86·10^{-6} (метод Аллена) и q = 4,83·10^{-6} (метод Палохеймо).

Т а б л и ц а II

Таблица исходных данных для расчета коэффициента улавливаемости методом линейной регрессии

Год промысла	Z_i	F_i	f_i	$\bar{Z}_{i,i+1}$	$f_{i,i+1}$	$\bar{Z}-M$
1966	1,20	0,75	71400	1,14	111350	0,69
1967	1,07	0,62	151300	1,02	111850	0,57
1968	0,96	0,51	72400	0,98	63200	0,53
1969	0,99	0,54	54000	0,94	169750	0,49
1970	0,88	0,43	285500	0,95	161700	0,50
1971	1,02	0,57	37900	0,98	53700	0,53
1972	0,94	0,49	69500	0,93	113350	0,48
1973	0,91	0,46	157200	-	-	-

П р и м е р. Рассмотрим способ оценки величины q на основе зависимости между коэффициентом общей смертности Z и промысловым усилием f в соответствии с формулой (45). Используя данные по промыслу тихоокеанского окуня и оценки коэффициента общей смертности Z (Ефимов, 1978), составим табл. 12.

Т а б л и ц а 12

Значения усилия и коэффициента общей смертности по годам промысла

Год промысла	Коэффициент общей смертности Z	Усредненное промысловое усилие $f_{i,i+1}$ (ч траления)
1966/67	0,51	33224
1967/68	0,54	40495
1968/69	0,45	29375
1969/70	0,35	17639
1970/71	0,50	14841
1971/72	0,39	11466
1972/73	0,33	13323

Строя зависимость Z на $\bar{f}$, получаем уравнение регрессии в виде:

$$Z = 0{,}32 + 5{,}38 \cdot 10^{-6} \bar{f}.$$

Графически эта же зависимость показана на рис. 2. Оценка параметров уравнения регрессии (уравнение прямой линии $y = a + bx$), сразу дает нам значение $q = 5{,}38 \cdot 10^{-6}$, определяемое углом наклона прямой к оси абсцисс.

Этот способ оценки позволяет также получить величину коэффициента естественной смертности M, которая будет равна параметру a в уравнении прямой линии: M = 0,32. На графике величина a соответствует отрезку оси ординат, отсекаемому построенной прямой.

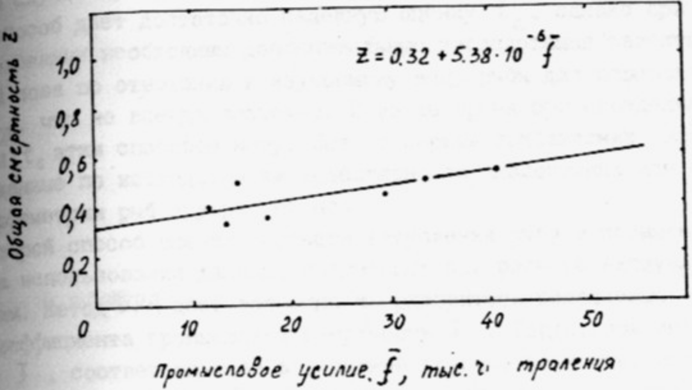


Рис. 2. Зависимость коэффициентов общей смертности тихоокеанского окуня от промыслового усилия

4. ОЦЕНКА ВОЗРАСТА ВСТУПЛЕНИЯ В ПРОМЫСЕЛ

Одним из важных параметров в аналитических (типа модели Ф.И.Баранова) моделях является возраст вступления рыбы в промысел t_c. Его значимость определяется существенным влиянием на расчеты кривой возможного улова и тем, что он устанавливает границу промыслового запаса, которым фактически и оперируют при расчетах величины возможного улова. Величина промыслового запаса в данном случае будет равняться части общей биомассы запаса для возрастных групп, начиная с той группы, которая принимается вступившей в промысел.

В некоторых случаях за возрастную группу, полностью вступившую в промысел, принимается модальная группа на кривой улова, однако более общепринятым считается, что возрасту вступления в промысел соответствует возрастная группа, которая облавливается на 50%.

Наиболее простыми способами оценки величины t_c можно считать методы, основанные на использовании данных по селективности орудий лова и результатов расчетов виртуальной популяции.

В первом случае по оценке коэффициента селективности k_c, величине рассчитанной длины 50% селективности $L_{50\%}$ и уравнению роста Берталанфи возраст вступления в промысел определяется по формуле:

$$t_c = t_0 - \frac{1}{k} \ln\left(1 - \frac{L_c}{L_\infty}\right).$$

В этом случае принимается $L_c = L_{50\%}$.

Этот способ дает достаточно надежную оценку t_c, однако при его использовании необходимы дополнительные исследования селективности орудий лова по отношению к изучаемому виду рыбы для определения k_c и $L_{50\%}$, что не всегда возможно. В то же время при определении величины t_c этим способом могут быть в первом приближении использованы данные по исследованиям селективности аналогичных или близких по морфометрии рыб других районов.

Второй способ оценки возраста вступления рыбы в промысел основан на использовании данных, полученных при расчете виртуальной популяции. Метод VPA дает возможность рассчитать возрастные изменения коэффициента промысловой смертности F. Тогда, принимая значение F, соответствующее возрастной группе, полностью вступившей в промысел, за единицу (F_{max}), рассчитывается доля F более младших возрастных групп относительно F_{max} (F_i / F_{max}). График, построенный по полученным результатам, где по оси абсцисс отложен возраст, а по оси ординат - отношение F_i / F_{max} в %, будет представлять собой кривую пополнения промыслового запаса рыб (или степень облавливаемости младших возрастных групп). Точка, соответствующая 50% пополнению, будет равна возрасту вступления рыбы в промысел.

Третий способ оценки величины t_c сходен с предыдущим, но для расчетов необходимы данные по возрастному составу уловов. В соответствии с уравнением Ф.И.Баранова ($N_t = N_0 \cdot e^{-Zt}$) численность рыб в поколении снижается по экспоненте, начиная с самых младших возрастных групп. На практике же в зависимости от селективности орудий лова, различий в распределении рыб младших и старших возрастов и других обстоятельств кривая улова не на всем своем протяжении будет совпадать с теоретической кривой изменения численности. Фактически лишь правая часть кривой улова, начиная с полностью облавливаемой возрастной группы, будет соответствовать кривой численности, левая же обычно не совпадает, причем отличие будет увеличиваться по мере уменьшения возраста. Такое различие связано прежде всего со значительной селективностью орудий лова по отношению к рыбам мелкого размера. Графически кривая улова, как правило, напоминает кривую нормального распределения. В этом случае, принимая модальную возрастную группу за первый возраст, полностью доступный промыслу, вычисляем долю более младшей возрастной группы через отношение индекса численности этой группы к индексу численности полностью вступившей в промысел возрастной группы ($\bar{n}_i / \bar{n}_{max}$). На построенном по этим данным графике точка, равная 50% от числен ности модальной группы, соответствует возрасту, принимаемому за возраст t_c.

При использовании возрастного состава уловов для вычисления величины t_c следует иметь в виду, что для получения минимума разброса оценок желательно усреднять данные по возрастному составу за ряд лет.

Точность оценки по всем рассмотренным способам примерно равнозначна и предпочтение при расчетах следует отдавать тому, для которого есть более надежная информация. В идеальном случае желательно проводить расчеты несколькими способами и сопоставлять полученные результаты.

Пример. Рассмотрим порядок расчета возраста t_c двумя последними способами.

В первом случае по данным расчета коэффициента промысловой смертности F орегонской мерлузы методом VPA (Ефимов, 1980) построим табл. 13.

Таблица 13

Среднее значение F и данные по частичному пополнению

Возраст									
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Среднее значение F									
0,00	0,00	0,03	0,25	0,63	0,62	0,40	0,46	0,52	0,61
Частичное пополнение, %									
0,0	0,0	4,8	39,7	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Практика промысла хека показывает, что в возрасте 7 лет и старше все рыбы попадают в орудие лова. Тогда, принимая значение семилетней возрастной группы за F_{max}, пересчитываем в % частичное пополнение промыслового запаса всеми возрастными группами младше семи лет по соотношению F_i / F_{max} (см. табл. 13). Полученные данные переносим на график (рис. 3). Точка на кривой I, соответствующая 50% пополнению промыслового запаса, дает искомую величину: t_c = 6,2 года.

Для оценки вторым способом воспользуемся данными по среднему возрастному составу уловов хека с 1966 по 1973 гг. (шт. на 10 ч траления) (Ефимов, 1980), приведенными в табл. 14.

Модальная группа по данным таблицы соответствует семилетнему возрасту. Пересчитывая долю пополнения запаса более младших возрастных групп по отношению к группе 7 через соотношение $\bar{n}_i / \bar{n}_{max}$ и нанося полученные результаты на рис. 3, построим кривую 2. Как и в предыдущем случае, находим: t_c = 5,7 года.

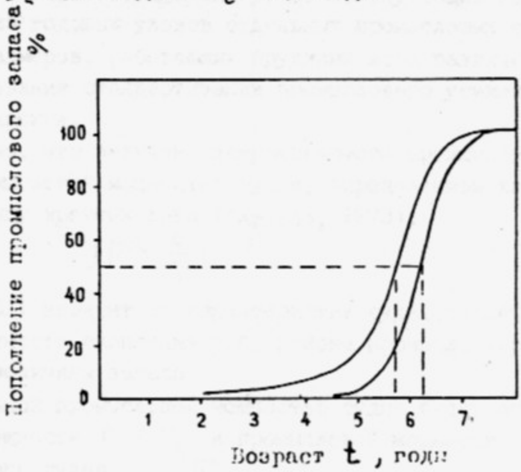


Рис. 3. Зависимость частичного пополнения промыслового запаса тихоокеанского хека от возраста

Таблица I4

Данные по числу рыб в пробах и частичному пополнению

Возраст											
2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3
Число рыб в пробах $\bar{n}$											
I	9	I6	54	264	347	I29	39	I7	8	4	2
Частичное пополнение,%											
0,3	2,6	4,6	I5,6	70,9	I00,0	I00,0	I00,0	I00,0	I00,0	I00,0	I00,0

5. СТАНДАРТИЗАЦИЯ ПРОМЫСЛОВОГО (РЫБОЛОВНОГО) УСИЛИЯ

Использование промысловой статистики для вычисления улова на единицу усилия как показателя промысловой мощности судна и численности промыслового стада рыб требует, чтобы единица усилия была четко определена.

Когда несколько рыболовных судов разной мощности и размеров облавливают промысловое стадо, для получения достоверной информации об истинной величине затраченного рыболовного усилия, необходимо провести стандартизацию усилия, приведя его к одному типу судна, выбранного в качестве стандартного. Поскольку общий годовой улов складывается из годовых уловов отдельных промысловых судов различных типов и размеров, работающих орудиями лова различного рода, выполнение требования стандартизации промыслового усилия вызывает большие затруднения.

Установлено, что величина затрачиваемого промыслового усилия связана с промысловой мощностью судна, определяемой как улов, добытый за единицу времени лова (Cardoso, 1973):

$$\mathfrak{F}P = \frac{C}{T},$$

где величина C/T зависит от характеристик судна, квалификации экипажа, плотности скопления рыб, района промысла, времени года, погоды и величины запаса.

Относительной промысловой мощностью судна будет отношение его промысловой мощности C_i / T_i к промысловой мощности эталонного или стандартного судна C_s / T_s

$$\rho = \frac{C_i / T_i}{C_s / T_s},$$

где C_i и C_s - уловы, взятые судном i и s за промысловое время T_i и T_s соответственно.

Так как при стабильном состоянии промысла, плотности скоплений рыб, постоянной производительности судов и орудий лова промысловое время адекватно рыболовному усилию, промысловой мощностью судна в этом случае будет улов на единицу промыслового усилия. Относительная промысловая мощность различных рыбопромысловых единиц определяется сравнением их характеристик за период, когда облов стад идентичен для всех судов; обычно предполагается, что относительная промысловая мощность судна для определенного запаса рыбы в определенном районе остается постоянной. Тогда промысловое усилие, развиваемое судном определенного типа, может быть определено как произведение его относительной промысловой мощности ρ_i и его промыслового времени T_i: $f_i = \rho_i \cdot T_i$.

Это выражение дает возможность измерить промысловое усилие различных судов в одних и тех же стандартных единицах. Общее стандартизированное усилие, развиваемое судами всех типов в районе промысла, будет равно $f_{об} = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i \cdot T_i$

При стабильном состоянии запаса и промысла это выражение может быть записано как

$$f_{об} = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i \cdot f_i ,$$

где ρ_i – относительная промысловая мощность, или коэффициент, фактор эффективности судна i .

Таким образом, для стандартизации промыслового усилия необходимо вычислить относительную промысловую мощность судов, ведущих промысел.

Это можно сделать разными способами.

Рассмотрим пример, в котором общий улов и усилие известны для шести промысловых рейсов, выполненных тремя различными судами на трех различных рыболовных банках в разное время (табл. I5) (Бивертон и Холт, 1969).

Таблица I5

Схема расположения промысловых судов на банках

Суда	Рыболовные банки		
	1	2	3
A	A_1	A_2	–
B	B_1	B_2	B_3
C	–	–	C_3

Предположим, что один из промысловых рейсов, выполненный, например, судном А на рыболовной банке 1, может быть в целях сопоставления произвольно принят за стандартный. Тогда промысловая мощность двух других судов может быть выражена относительно промысловой мощности судна А. Пусть стандартное судно А ведет промысел вместе с судами В и С. При этом не ставится непременным условием работа в одном и том же районе. Тогда показатели их промысловой мощности можно выразить отношениями B_1/A_1, B_2/A_2 и C_3/A_3, в которых через А, В и С обозначены уловы трех судов за единицу усилия, а индексы указывают на время и район лова. Промысловую мощность судна С, например, в долях промысловой мощности судна А можно представить четырьмя способами:

$$\rho_C = \frac{B_1}{A_1} \cdot \frac{C_3}{B_3} = \frac{B_2}{A_2} \cdot \frac{C_3}{B_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{B_1}{A_1} \cdot \frac{B_2}{A_2}\right) \cdot \frac{C_3}{B_3} = \frac{A_1 + B_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{C_3}{B_3} .$$

С точки зрения математической статистики эти оценки не являются независимыми; более строгой с точки зрения теории будет оценка, предложенная Д.Робсоном (Robson, 1966). При тех же начальных условиях оценка относительной мощности судна С может быть получена из выражения:

$$\rho_c = \frac{C_3}{B_3}\sqrt{\frac{B_I \cdot B_2}{A_I \cdot A_2}}.$$

Промысловое усилие судна С, выраженное в стандартных единицах, будет равно $f_c = \rho_c \cdot T_c$.

На практике впервые стандартизация промыслового усилия была произведена М.Шефером при анализе деятельности тунцеловного флота в Тихом океане. Тунцеловным промыслом используются суда самых разнообразных типов (клипперы, сейнеры, малые сейнеры), различающиеся промысловой мощностью. Поэтому суда были разбиты на размерные группы и для каждой группы получен средний улов на день промысла путем деления общего улова на общее число дней, проведенных в море. Стандартной была выбрана одна из размерных групп судов, и улов на единицу усилия остальных групп пересчитан на улов стандартного типа судна при помощи поправочного коэффициента. Математически методику стандартизации можно описать следующим образом. Пусть i - интервал времени (год), j - район промысла, k - размерная категория судов, c_{ijk} - улов рыбы в районе j в течение i-го года при затрате f_{ijk} единиц промыслового усилия для размерной категории судов k. Тогда улов на единицу усилия в районе j в i-ом году для категории судов k может быть выражен при помощи уравнения

$$d_{ijk} = \frac{c_{ijk}}{f_{ijk}}.$$

По всем районам в заданном году получим

$$d_{ik} = \frac{c_{ik}}{f_{ik}}.$$

Соответственно для стандартной группы судов s будем иметь

$$d_{ijs} = \frac{c_{ijs}}{f_{ijs}},$$

$$d_{is} = \frac{c_{is}}{f_{is}}.$$

Коэффициент относительной промысловой мощности ρ_{ik}, определяемый отношением улова на усилие судов категории К к улову на усилие стандартной группы судов s за n лет, может быть получен по формуле:

$$\rho_{ik} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{c_{ik}}{f_{ik}}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{c_{is}}{f_{is}}}.$$

Общее усилие, выраженное через стандартные единицы, для i-го года будет равно

$$f_{i,0} = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_{ik} \cdot f_{ik}.$$

К сожалению, при анализе результатов промысла очень редко имеются данные о деятельности отдельных судов, а когда в районе промысла лов ведут суда нескольких стран, вообще трудно или невозможно собрать данные для выражения усилия для всех стран в одних и тех же единицах и, таким образом, получить величину общего усилия. В этом случае один из типов судов (например, А) может быть принят за стандартный и его улов на единицу усилия взят за показатель плотности запаса, а общее усилие в стандартизированных единицах определяется как (Gulland, 1969):

$$f_{об} = \frac{C}{C_A/f_A} = f_A \frac{C}{C_A}, \tag{47}$$

где C - общий улов всеми судами и странами;

C_A - улов стандартным типом судов;

f_A - промысловое усилие стандартного типа судов.

Однако подобный упрощенный расчет возможен лишь в том случае, если уловистость орудий лова судов всех флотилий примерно одинакова или по крайней мере сопоставима.

Покажем это на следующем примере. Обший улов всех судов, ведущих промысел, может быть выражен как

$$C_{об} = q_{об} \cdot f_{об} \cdot \bar{N},$$

где $\bar{N}$ - средняя численность облавливаемого запаса рыбы;

$q_{об}$ - коэффициент уловистости орудия лова;

$f_{об}$ - общее промысловое усилие.

Точно так же можно найти и величину улова стандартного флота, который получен из этого же запаса: $C_s = q_s \cdot f_s \cdot \bar{N}$.

Преобразовав эти два выражения, получим

$$\frac{c_s}{q_s \cdot f_s} = \frac{C_{об}}{q_{об} \cdot f_{об}}$$

Откуда общее, выраженное через стандартное, усилие будет равно

$$f_{об} = \frac{C_{об} \cdot q_{об} \cdot f_s}{q_s \cdot C_s} = \frac{q_{об}}{q_s} \cdot \frac{C_{об}}{C_s/f_s}.$$

Таким образом, чтобы получить выражение (47) для общего усилия всего флота, необходимо, чтобы $q_{об}/q_s = 1$, а это возможно лишь когда $q_{об} = q_s$.

В первом приближении при стандартизации промыслового усилия предполагается, что уловистость орудий лова одинакова и постоянна и формула (47) широко используется при практических рачетах.

Область применения любого из рассмотренных способов стандартизации определяется прежде всего наличием информации о результатах промысла. В традиционных районах лова с хорошо налаженным сбором статистических данных исследователь имеет возможность получить в свое распоряжение любые данные достаточного объема и качества. В этом случае целесообразно использовать более детальные способы стандартизации (например, Шефера и Робсона). При недостатке исходной информации в случае ведения промысла судами нескольких стран одновременно, когда невозможно проследить за деятельностью отдельных судов, можно использовать для получения общего стандартизированного усилия уравнение (47).

П р и м е р применения этого уравнения для стандартизации промыслового усилия на промысле орегонской мерлузы (Ефимов, 1980). Промысел осуществлялся судами нескольких стран, однако доступными были лишь данные по общему вылову. Флот СССР вылавливал более 90% общего улова, преимущественно судами типа БМРТ, которые и были выбраны в качестве стандартных.

В табл. 16 приведены данные по общему вылову по годам промысла и данные по уловам на усилие БМРТ. Общее стандартизированное усилие рассчитывали делением общего улова на улов на усилие стандартных судов. Результирующие значения величины общего стандартизированного усилия приведены в последнем столбце таблицы.

Таблица I6

Исходная статистика и результаты стандартизации промыслового усилия

Год промысла	Общий улов С, т	Улов на единицу усилия стандартного судна, т/ч траления	Общее стандартизированное усилие, ч траления
I966	I33600	I,87	7I400
I967	I80000	I,I9	I5I300
I968	I07800	I,49	72400
I969	I7I800	3,I8	54000
I970	I7I300	0,60	285500
I97I	I83I00	4,83	37900
I972	II9600	I,72	69500
I973	I63500	I,04	I57200
I974	205800	3,I6	65I00
I975	307600	2,65	78300
I976	235900	3,35	70200

П. БИОСТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЗАПАСОВ

Подход к оценке величины промысловых запасов, основанный на последовательном восстановлении численности отдельных поколений по результатам анализа размерно-возрастного состава уловов был заложен в работах К.К.Терещенко и А.М.Державина однако широкую известность и развитие получил только в послевоенный период, после того, как был обогащен важнейшими соотношениями формальной теории жизни рыб Ф.И.Баранова (I9I8)

$$N_{i+1} = N_i e^{-(F_i+M)}; \qquad (48)$$

$$C_i = \frac{N_i F_i}{F_i+M}\left(1 - e^{-(F_i+M)}\right), \qquad (49)$$

где N_i, N_{i+1} – численность запаса в конце соответственно i-го и $(i+1)$-го года;

C_i – численность улова в год i ;

F_i – мгновенный коэффициент промысловой смертности в год i ;

M - мгновенный коэффициент естественной смертности; предполагается, что M = const для всех i .

Это позволило существенно расширить возможности данного подхода и привело к созданию самостоятельной группы биостатистических методов количественной оценки состояния запасов, которые успешно применяются для решения разнообразных задач, связанных с рациональным использованием рыбных ресурсов.

Ниже рассматриваются наиболее употребительные из биостатистических методов.

I. АНАЛИЗ ВИРТУАЛЬНОЙ ПОПУЛЯЦИИ (VPA)

Как современный метод оценки запасов он сформировался в середине 60-х годов, когда независимо друг от друга Мэрфи и Галланд (Gulland, 1965) опубликовали работы, посвященные способам решения уравнения улова Беранова применительно к процедуре последовательных вычислений.

В качестве исходного для расчетов выражения Мэрфи использовал отношение фактических уловов соседних возрастных групп:

$$R_i = \frac{C_{i+1}}{C_i} = \frac{C_{i+1}\, e^{-(F_i + M)}}{E_i}, \qquad (50)$$

где E_i и E_{i+1} - истинные (по Рикеру, 1970) коэффициенты эксплуатации, в частности для i -й возрастной группы

$$E_i = \frac{C_i}{N_i} = \frac{F_i}{F_i + M}\left(1 - e^{-(F_i + M)}\right), \qquad (51)$$

где N_i - начальная численность i -й группы.

В противоположность Мэрфи Галланд построил свой метод на анализе "виртуальной популяции" (VPA), позаимствовав этот термин у Фрая, который под виртуальной популяцией понимал "сумму рыб, принадлежащих к разным годовым классам, находящимся в воде в любой данный момент времени и которым суждено быть пойманным в рассматриваемый год и во все последующие годы". Нетрудно заметить полное смысловое совпадение этого определения с определением минимальной численности запаса у А.Н.Державина и термином "используемый запас" в понимании И.Н.Воеводина.

Основным соотношением в методе Галланда является выражение

$$r_i = \frac{N_{i+1}}{C_i} = \frac{F_i + M}{F} \cdot \frac{e^{-(F_i + M)}}{(1 - e^{-(F_i + M)})}, \qquad (52)$$

где r_i – относительная численность поколения на конец i-го года.

В качестве показателя интенсивности вылова используется коэффициент эксплуатации виртуальной популяции

$$E_i^* = \frac{V_i}{N_i}, \qquad (53)$$

Здесь V_i – используемая (виртуальная) численность поколения на начало i-го года

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} C_j, \qquad (54)$$

где n – индекс самой старшей возрастной группы.

Покажем связь между истинным и виртуальным коэффициентами эксплуатации.

Учитывая определение виртуальной популяции, можно записать:

$$C_i = V_i - V_{i+1} \qquad (55)$$

или, учитывая уравнение (53)

$$C_i = E_i^* N_i - E_{i+1}^* N_{i+1}. \qquad (56)$$

Выразив в уравнении (56) C_i через истинный коэффициент эксплуатации (5I), а N_{i+1} через N_i (48) после преобразований получим:

$$E_i^* = E_i + E_{i+1}^* e^{-(F_i + M)}, \qquad (57)$$

т.е. виртуальный коэффициент эксплуатации равен сумме доли вылова рассматриваемого поколения в i-м году (истинный коэффициент эксплуатации) и доли вылова из этого поколения во все последующие годы.

На методах Мэрфи и Галланда основаны все современные биостатические методы анализа возрастного состава уловов, которые в самом общем виде можно сформулировать в виде следующей задачи. Известно: возрастной состав уловов по годам промысла; мгновенный коэффициент естественной смертности (как правило, принимается M = const для всех возрастных групп); мгновенный коэффициент промысловой смертности (или численности) одной из возрастных групп. Следует определить: коэффициенты смертности (промысловой и общей) для всех возрастных групп; численность возрастных групп.

При наличии дополнительной информации (например, по весовому росту, по темпам полового созревания, селективности промысла и т.д.) задача может ставиться шире за счет, например, оценки биомассы всего запаса или его промысловой части, определения численности и биомассы родительского стада и т.д.

Оценка коэффициентов смертности и восстановления численности поколений начинается с возрастной группы, для которой известно значение коэффициента $\mathcal{F}$. Предположим, это некоторая промежуточная группа k. Тогда из уравнения улова Баранова находим

$$\mathcal{N}_k = \frac{C_k(\mathcal{F}_k + M)}{\mathcal{F}_k(1 - e^{-(\mathcal{F}_k + M)})}. \tag{58}$$

Для расчета параметров возрастных групп, предшествующих k-й ("обратный" расчет), обратимся к соотношению Галланда

$$\frac{\mathcal{N}_k}{C_{k-1}} = \frac{\mathcal{F}_{k-1} + M}{\mathcal{F}_{k-1}} \cdot \frac{e^{-(\mathcal{F}_{k-1} + M)}}{1 - e^{-(\mathcal{F}_{k-1} + M)}}, \tag{59}$$

откуда определим единственное неизвестное $\mathcal{F}_{k-1}$

Затем рассчитывается численность в начале $(k-1)$ года:

$$\mathcal{N}_{k-1} = \mathcal{N}_k \cdot e^{(\mathcal{F}_{k-1} + M)} \tag{60}$$

Параметры $\mathcal{F}$ и $\mathcal{N}$ для возрастных групп $k-2$, $k-3, \ldots, 1$ находятся аналогично.

Оценка групп, следующих за k-й ("прямой" расчет), начинается с определения численности $(k+1)$ группы по формуле

$$\mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{N}_k e^{-(\mathcal{F}_k + M)} \tag{61}$$

После этого, тем же приемом, что и в предыдущем случае, определяется $\mathcal{F}_{k+1}$ из соотношения

$$\frac{\mathcal{N}_{k+1}}{C_{k+1}} = \frac{\mathcal{F}_{k+1} + M}{\mathcal{F}_{k+1}(1 - e^{-(\mathcal{F}_{k+1} + M)})} \tag{62}$$

Имея оценки N_{k+1} и F_{k+1}, нетрудно рассчитать параметры $(k+2)$-й возрастной группы, затем $(k+3)$ и т.д. - до последней, n-ой группы.

На практике, однако, "прямой" расчет не используется потому, что при таком способе вычислений накапливаются ошибки в оценках промысловой смертности при переходе от младших возрастных групп к старшим.

Исследуя численными методами выражение

$$\frac{c_{i-1}}{c_i} = \frac{exp(-F_i+\alpha-M)(F_{i+1}+\beta)(F_i+\alpha+M)[1-exp(F_{i+1}-\beta-M)]}{(F_{i+1}+\beta+M)(F_i+\alpha)[1-exp(-F_i-\alpha-M)]}, \quad (63)$$

где α - ошибка оценки исходного коэффициента промысловой смертности F_i ;

β - ошибка оценки коэффициента промысловой смертности, полученной последовательным расчислением,

Томлинсон (Tomlinson, 1970) показал, что при "прямом" методе расчета $|\beta| > |\alpha|$. При "обратном" способе ошибка в оценке промысловой смертности старшей возрастной группы нивелируется при переходе к младшей возрастной группе, так что оценки F_i для большинства младших групп практически не зависят от выбора F_n из диапазона его возможных значений.

Остановимся подробнее на процедуре "обратного" способа расчета применительно к методу VPA. Как и ранее, рассмотрение проводим на примере одного поколения.

Относительную численность поколения в конце произвольного i-го года можно определить двумя способами. С одной стороны (формула (5I)

$$r_i = \frac{(F_i+M)\, e^{-(F_i+M)}}{F_i(1-e^{-(F_i+M)})} \quad (64)$$

т.е. при фиксированном M r_i является функцией одного переменного F_i и легко табулируется на всем диапазоне значений F .

С другой стороны,

$$r_i = \frac{N_{i+1}}{C_i} = \frac{V_{i+1}}{E_{i+1}C_i} \quad (65)$$

и может быть оценена по исходным данным. Следовательно, п редварительно полученной оценке $\hat{r}_i$ из таблиц $r = r(F)$ нетрудно определить значение аргумента F_i. Подобным приемом воспользовался сначала Галланд (Gulland, 1965), а затем Шумахер при расчете промысловой смертности западногренландской трески, для чего им была составлена таблица значений функций $r = r(F)$ при $M = 0,2$ в диапазоне $0,01 \leq F \leq 1,30$. Табличный способ расчета вполне оправдывает себя при отсутствии ЭВМ или в случае $M \neq const$. Для применения этого способа к большему числу видов нами составлены таблицы функции $r = r(F)$ в диапазоне значений M для рыб средне- и длинноцикловых видов: $0,1 \leq M \leq 0,5$ (см. Приложение).

Последовательность расчетов методом VPA с использованием таблиц.

1. Вычисляется виртуальный коэффициент эксплуатации E_n^* для старшей возрастной группы N_n. Здесь могут встретиться два случая.

А. Начальная возрастная группа N_n является самой старшей в рассматриваемом поколении. Заменив E_i в уравнении (57) выражением (51), получим для $i = n$:

$$E_n^* = \frac{F_n}{F_n+M}\left(1-e^{-(F_n+M)}\right) + E_{n+1}^* e^{-(F_n+M)} \qquad (66)$$

Так как рыбы, старше возраста n отсутствуют, $E_{n+1}^* = 0$,

откуда
$$E_n^* = \frac{F_n}{F_n+M}\left(1-e^{-(F_n+M)}\right), \qquad (67)$$

т. е. в этом случае понятие "виртуальная популяция" теряет смысл и расчет ведется по формуле истинного коэффициента эксплуатации.

Б. Возрастная группа N_n включает в себя особей возраста n и старше.

Если предположить, что, начиная с возраста n, особи подвержены одинаковой промысловой смертности $F_n = F_{n+1} = F_{n+2} = \ldots = F = const$ и что по-прежнему $M = const$, то $E_n^* = E_{n+1}^* = E_{n+2}^* = \ldots = E^* = const$.

Произведя замену $E_{n+1} = E_n$ в уравнении (66), после необходимых преобразований имеем:

$$E_n^* = \frac{F_n}{F_n+M} \qquad (68)$$

2. Оценивается численность старшей возрастной группы

$$N_n = \frac{C_n}{E_n^*} \qquad (69)$$

Здесь $V_n = C_n$.

3. Оценивается относительная численность поколения в конце $n-1$ года

$$r_{n-1} = \frac{N_n}{C_{n-1}}. \qquad (70)$$

4. По таблице функции $r = r(F)$ находятся значения коэффициента промысловой смертности F_{n-1} и истинного коэффициента эксплуатации E_{n-1}, наилучшим образом соответствующие оценке r_{n-1}.

5. Оценивается коэффициент эксплуатации возрастной группы (n- I):

$$E^*_{n-1} = u_{n-1} + E_n e^{-(F_{n-1}+M)}. \qquad (71)$$

6. Вычисляется используемый запас возрастной группы (n- I):

$$V_{n-1} = \sum_{i=n-1}^{n} C_i. \qquad (72)$$

7. Оценивается начальная численность группы (n - 1)

$$N_{n-1} = \frac{V_{n-1}}{E^*_{n-1}}. \qquad (73)$$

Для оценки параметров N_i и F_i оставшихся групп цикл операций 3 - 7 последовательно повторяется в направлении от (n - 2) к I-й возрастной группе.

Для упорядочения расчетов целесообразно табулировать исходные и расчетные величины следующим образом

№ возрастной группы	Уловы C_i, шт.	Используемый запас V_i	Виртуальный коэффициент эксплуатации E^*_i	Истинный коэффициент эксплуатации u_i	Относительная численность эксплуатации r_i	Коэффициент промысловой смертности F_i	Численность возрастной группы N_i
I	2	3	4	5	6	7	8

Если обсчитывается поколение, данные по которому охватывают только часть (начальную) промыслового периода его жизни, частные величины используемой численности этого поколения V_i подсчитать невозможно. В этом случае формула для оценки относительной численности выводится следующим образом.

Из уравнения улова (49) и выражения (66) для n + 1 возрастной группы имеем

$$\mathcal{N}_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{E^{*}_{n+1}\left(1-e^{-(F_{n+1}+M)}\right)} \qquad (74)$$

Замечания по применению VPA

I. Применение VPA дает хорошие результаты тогда, когда оценивается интенсивно эксплуатируемая популяция, т.е. когда промысловая смертность - главная причина смертности. В противоположном случае резко возрастают требования к точности используемого в анализе коэффициента естественной смертности M, которые на практике далеко не всегда выполнимы. Следует учитывать, что переоценка коэффициента M приводит к гораздо большим ошибкам в оценке численности поколений, чем недооценка.

2. Используемая в биостатистических методах процедура последовательных расчетов не допускает наличия пробелов в исходных данных по уловам в течение промыслового периода жизни поколения. Если же в данных все-таки имеются разрывы (чаще всего это встречается в старших возрастах), расчеты следует либо начинать с возрастной группы, предшествующей пробелу, либо, если это по какой-то причине нежелательно, пробелы можно искусственно заполнить произвольными значащими числами, обычно сопоставимыми с точностью вычислений и учитывающими фактическую тенденцию уменьшения численности уловов по возрастам.

3. При расчетах иногда необходимо упорядочить число возрастных групп по всем поколениям, включенным в анализ, например, при использовании выходных данных VPA для построения кривых уравновешенного улова или улова на единицу пополнения; их можно трактовать как модели равновесного состояния, при котором каждому уровню промыслового воздействия соответствует определенная возрастная структура облавливаемой популяции. При этом, чем выше F, тем меньшим числом возрастов будет представлен эксплуатируемый запас. Следовательно, количество включаемых в анализ возрастных групп имеет принципиальное значение. Однако это обстоятельство нередко упускают, и диапазон возрастов выбирают из других соображений, например, исходя из степени надежности определения возраста в старших группах. Произвольный выбор временно́го диапазона приводит к существенным различиям в оценках. Это в первую очередь касается положения максимума кривой улова, который сдвигается влево при увеличении коли-

чества учитываемых возрастных групп. Энтони (Anthony, 1982) предложил стандартизировать процедуру выбора, связав число рассматриваемых возрастов с величиной мгновенного коэффициента естественной смертности M согласно следующему правилу: принимаемый для расчетов диапазон возрастов равен числу лет, в течение которых средняя численность поколения при отсутствии промысла уменьшается до 5 или 10% своей первоначальной величины. Эти величины в известной степени произвольны и отражают уровень численности поколения, при котором его долей в общем запасе можно пренебречь. При 5%-ном уровне верхняя граница искомого возрастного диапазона определяется из эмпирического выражения (Anon. , 1983):

$$n = 3/M. \qquad (75)$$

На основе этого выражения для средне- и длинноцикловых видов рыб $0{,}1 \le M \le 0{,}5$ можно рекомендовать следующие значения n:

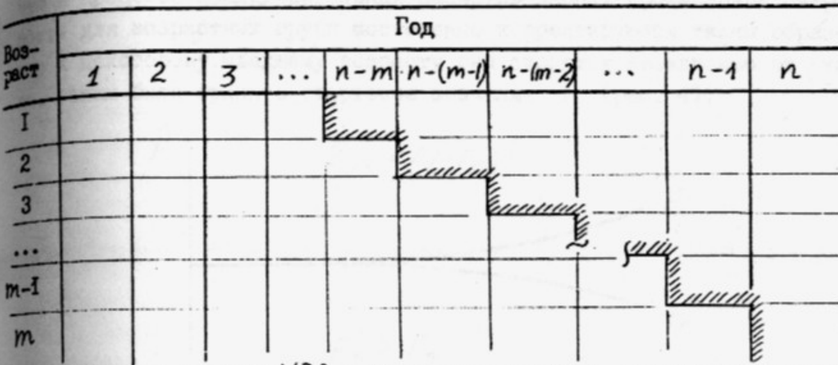
M	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
n	30	15	10	8	6

Из этих данных следует, что если для некоторого вида коэффициент естественной смертности равен, например, 0,4, то при расчетах учитываемую продолжительность жизни каждого поколения следует ограничить 8 годами.

4. В любой год промысла основной вклад в уловы обеспечивают неполностью обловленные поколения, т.е. поколения, промысловый период жизни которых не заканчивается в данный год. Так, если для наглядности принять, что продолжительность промыслового периода жизни m одинакова для всех поколений, а количество включенных в рассмотрение лет промысла $n \geq m$, то, как нетрудно видеть, каждый год оказывается последним только для самого старшего из поколений, формирующих промысловый запас данного года. Все остальные $(m-1)$ поколений будут участвовать в промысле и на следующий год.

Поскольку вычисления в методе VPA ведутся по поколениям, то, учитывая указанную особенность структуры промыслового запаса, оценки коэффициента промысловой смертности и численности возрастных групп поколений, начинающих вступать в промысловое стадо в последние $(m-1)$ лет из рассматриваемого периода времени, следует вести по формулам для неполностью обловленных поколений, остальные – для полностью обловленных годовых классов (схема).

Схема разделения поколений при расчетах методом VPA



5. Расчеты методом VPA начинают со втарщей возрастной группы каждого поколения, величина промысловой смертности для которой предварительно оценивается или задается (так называемое стартовое значение промысловой смертности).

В качестве стартового значения промысловой смертности для всех полностью обловленных поколений, как правило, принимают единую оценку. Чаще всего - это усредненная по старшим возрастам оценка вида

$$F = \ln\left(u_i^N / u_{i-1}^N\right) - M, \tag{76}$$

где u_i^N и u_{i-1}^N - численности уловов на единицу затраченного усилия двух последовательных возрастных групп одного поколения.

Усреднение ограничивают несколькими старшими возрастами и теми поколениями, для которых можно рассчитать оценки F в выбранном диапазоне старших возрастных групп.

Расчеты F_{st} построенные на данных по численности уловов в старших возрастах, редко обеспечивают высокую точность из-за ошибок определения возраста в старших группах и, следовательно, ошибок в оценке u_i^N и u_{i-1}^N.

Поуп подсчитал, что недооценка стартового значения F_{st} вызывает бóльшую ошибку в оценках N_{st}, чем его переоценка. Например, переоценка F_{st} на 50% приводит к недооценке N_{st} на 35%, в то время как такая же недооценка F_{st} вызывает оценку N_{st} на 100%. Возможные ошибки в стартовых значениях промысловой смертности для полностью обловленных поколений не вызывают серьезных погрешностей в суммарных оценках численности запаса, особенно когда рассматриваемый диапазон промысловых возрастов достаточно велик. Дело в том, что в процессе последовательных расчетов оценки промысловой смертности для возрастных групп постепенно корректируются таким образом, что к некоторому младшему возрасту они сходятся независимо от того, каким было принято стартовое значение $\mathcal{F}$ (рис. 4).

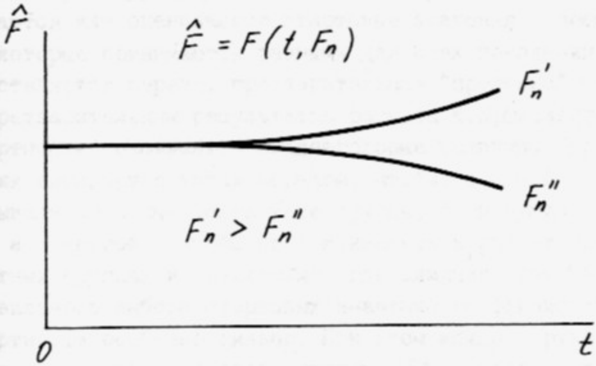


Рис. 4. Влияние выбора стартового значения коэффициента промысловой смертности $\mathcal{F}_n$ на оценки промысловой смертности в младших возрастах

Поскольку численности старших возрастов, особенно при интенсивной эксплуатации, малы, то и ошибкой от неправильного выбора (или расчета) $\mathcal{F}_{5t}$ во многих практических случаях можно пренебречь.

Расчетную оценку $\mathcal{F}_{5t}$ допустимо поэтому заменить экспертной оценкой, которая заключается в простом выборе $\mathcal{F}_{5t}$ из диапазона его возможных значений. В качестве такого диапазона можно рекомендовать интервал

$$M \leq \mathcal{F}_{5t} \leq 2M.$$

6. Оценка стартовых значений промысловой смертности неполностью обловленных поколений гораздо более ответственна по нескольким причинам. По существу она является оценкой распределения промысловой смертности по возрастным группам в последний год промысла и целиком определяет правильность оценок смертности и численности основных промысловых возрастов на протяжении нескольких предшествующих лет. Особенно велики требования к точности оценки коэффициентов промысловой смертности в последний год, если VPA используется для прогнозирования допустимого улова на ближайшую перспективу, и в этом случае последний год представляет собой исходную базу для прогноза.

Достаточно надежные оценки стартовых значений промысловой смертности для неполностью обловленных поколений можно получить при помощи процедуры, которая получила название "настройки". Для использования этой процедуры, помимо стандартного набора исходных данных для VPA, требуются также значения затраченного усилия по годам промысла. Процедура разбивается на следующие этапы.

А. Выбираются или оцениваются стартовые значения промысловой смертности, которые принимаются равными для всех поколений.

Б. Осуществляется первая, предварительная "прогонка" VPA.

В. По предварительным результатам расчета коэффициентов промысловой смертности оцениваются среднегодовые величины $\bar{F}_j$. Интервал усреднения выбирается таким образом, чтобы, с одной стороны, оценки охватывали основные возрастные группы, формирующие промысловый запас, а с другой - чтобы не принимались в расчет оценки F_i в тех возрастных группах и поколениях, где влияние возможных ошибок от неправильного выбора стартовых значений коэффициента промысловой смертности особенно сильно. При этом можно руководствоваться правилом, что при расчетах методом VPA выбор стартового значения промысловой смертности практически мало сказывается на оценках уже в 3-4-й возрастной группе, начиная со старшей. Это касается как полностью, так и неполностью обловленных поколений, хотя, строго говоря, в поколениях, где расчет начинают со средних и младших возрастов, влияние выбора стартового значения сильнее сказывается на величине последующих оценок. Таким образом, расчет среднегодовых значений F лучше ограничить за 2 года до последнего года промысла (для которого значения промысловой смертности во всех возрастных группах заданы равными стартовым значениям для полностью обловленных поколений). При усреднении F обычно используют оценку, взвешенную по численности возрастных групп:

$$\bar{F}_j = \frac{\sum_{i=k}^{l} F_{ij} N_{ij}}{\sum_{i=k}^{l} N_{ij}}, \tag{77}$$

где $\bar{F}_j$ - средняя величина промысловой смертности в год j ;
F_{ij} - промысловая смертность возрастной группы i в год j ;
N_{ij} - численность возрастной группы i в год j ;
k, l - границы диапазона усреднения по возрастам.

Иногда допускается представление $\bar{F}_j$ и в виде арифметической средней

$$\bar{F}_j = \frac{\sum_{i=k}^{l} F_{ij}}{l-k+1}. \tag{78}$$

Допускается наличие линейной зависимости $F = qf$ при $q = const$ на всем рассматриваемом интервале. Находят уравнение линейной регрессии $\bar{F}$ на f и с его помощью по известному значению промыслового усилия в последний год f_n оценивают среднее значение промысловой смертности на этот год $\bar{F}_n$.

Д. Вычисляют долевое распределение среднего коэффициента промысловой смертности по возрастам за ряд лет, предшествующих последнему, и соответственно этому распределению и оценке $\bar{F}_n$ рассчитывают возрастные коэффициенты промысловой смертности в последний год.

Для оценки возрастных коэффициентов смертности можно применить и другой способ (Butterworth, Andrew, 1984):

$$F_{i,n} = f_n \cdot \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \cdot \frac{F_{i,n-k}}{f(n-k)}; \tag{79}$$

где $F_{i,n}$ – оценка коэффициента промысловой смертности возрастной группы i в последний год n;

$(1,m)$ – интервал усреднения;

f_n – промысловое усилие в год n.

Использование простого арифметического усреднения для нахождения $\bar{F}_{i,n}$ не всегда оправдано, поскольку в этом случае реальная ситуация сводится к уравновешенной.

Е. После уточнения стартовых значений коэффициентов промысловой смертности операция повторяется в прежней последовательности. "Настройка" заканчивается, когда различие в оценках, полученных в двух соседних итерациях становится практически несущественным. Часто случается, что усилие для последнего года промысла определить невозможно, в то время как известна величина улова на усилие, например, по результатам экспериментальных тралений. В этом случае процедура оценки среднегодового значения $\bar{F}_n$ для последнего года промысла несколько изменяется.

После предварительных расчетов методом VPA строится регрессия величины промыслового запаса (состоит из возрастных групп, общий вклад которых в ежегодный улов составляет 90-95%) на соответствующие значения улова на усилие. В противоположность предыдущему случаю форма регрессионной зависимости не обязательно должна быть линейной. Найденное уравнение регрессии используют для определения численности запаса в последний год промысла (N_n) по известному улову на усилие в этот год (U_n). Искомое F_n оценивается с помощью уравнения Баранова

$$C_n = N_n \frac{F_n}{F_n + M}\left(1 - e^{-(F_n+M)}\right). \qquad (80)$$

Дальнейшая процедура "настройки" аналогична описанной выше.

Критерием качества "настройки" в условиях принятого допущения о постоянстве коэффициента улавливаемости может служить теснота линейной связи между оценками среднегодовых значений коэффициента промысловой смертности и соответствующими величинами промыслового усилия, характеризующаяся величиной коэффициента корреляции.

Выбор первоначального стартового значения F при условии последующей настройки не имеет принципиального значения.

Можно указать на два недостатка рассмотренной выше процедуры. Первый заключается в том, что величины F и f - зависимые переменные. Оценка $\bar{F}_j$ полученная с помощью VPA является функцией естественной смертности M, улова C_j и величины запаса в конце года N_j. Если принять $N_j = const$, то оценка F_j будет увеличиваться с увеличением C_j. Следовательно, $\bar{F}_j$ и f_j положительно коррелируют и с C_j и друг с другом.

Второй недостаток заключается в трудоемкости настройки, которая даже при использовании ЭВМ достаточно продолжительна главным образом за счет длительности подготовки исходных данных перед началом каждой итерации.

7. Процедуру настройки можно сократить, использовав для этого прямые методы оценки стартовых значений промысловой смертности для неполностью обловленных поколений (для последнего года промысла).

Ниже рассматриваются упрощенная (I) и более строгая (П) интерпретация метода оценки, основанного на анализе численностей годовых уловов по возрастным группам.

I. Предполагается, что коэффициент промысловой смертности вступившего в промысел поколения увеличивается с возрастом до тех пор, пока, наконец, в возрасте T не достигнет предела F_T, соответствующего уровню 100% промысловой селективности, и стабилизируется на этом уровне (рис. 5). Для практических целей в качестве F_T допустимо использовать предварительно рассчитанный стартовый коэффициент промысловой смертности F_{st}.

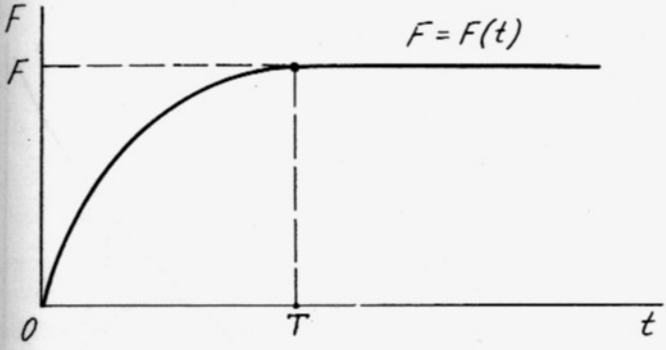


Рис. 5. Графическое представление гипотезы о возрастном распределении промысловой смертности

Исходя из принятого допущения, промысловую смертность $\mathcal{F}_i$, действующую на возрастную группу i некоторого поколения, можно представить в виде произведения $\mathcal{F}_T$ и безразмерного коэффициента ε_i, который показывает, какую долю $\mathcal{F}_i$ составляет от $\mathcal{F}_T$

$$\mathcal{F}_i = \varepsilon_i \mathcal{F}_T ; \tag{81}$$

$$\varepsilon_i < 1 \text{ для всех } i < T,$$

$$\varepsilon_i = 1 \text{ для всех } i \geq T.$$

Предположим далее, что то же поколение облавливается промыслом при условии, что все возрастные группы подвергаются воздействию одинаковой промысловой смертности $\mathcal{F}_T$ (кривая улова $C^* = C(\mathcal{F})$ на рис. 6), т.е. селективность промысла отсутствует.

Рассмотрим отношение уловов i-й возрастной группы при реальном C_i и гипотетическом C_i^* промысле:

$$\frac{C_i}{C_i^*} = \frac{\mathcal{F}_i \bar{N}_i}{\mathcal{F}_T^* \bar{N}_i^*}, \tag{82}$$

где $\bar{N}_i$ и $\bar{N}_i^*$ – средние численности i-й возрастной группы соответственно для реального и гипотетического случая.

При умеренном прессе промысла, когда он ежегодно изымает сравнительно небольшую часть запаса

$$\bar{N}_i \simeq \bar{N}_i^* \tag{83}$$

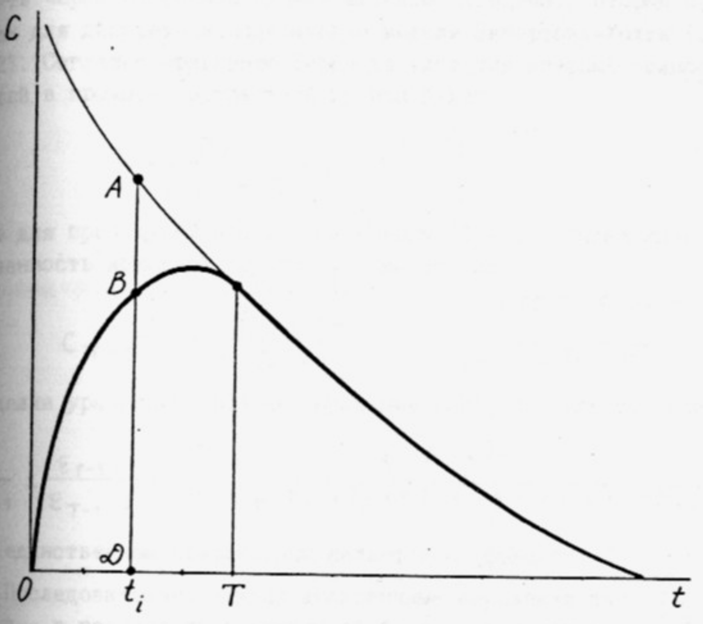


Рис. 6. Графоаналитический метод оценки возрастных коэффициентов

и отношение (82) с учетом равенства (83) приводится к виду:

$$\frac{C_i}{C_i^*} \simeq \mathcal{E}_i\,. \tag{84}$$

Заменяя C_i и C_i^* соответствующими отрезками BC и AC (см. рис. 6), окончательно получим

$$\mathcal{E}_i = \frac{BD}{AD}. \tag{85}$$

Выражение (85) можно использовать для приближенной оценки коэффициента промысловой смертности в диапазоне возрастов $0 < i < T$.

Кривая гипотетического улова $C^* = C(\mathcal{F}_T, \mathcal{N}_i)$ на отрезке $i \geqslant T$ совпадает с кривой фактического улова $C = C(\mathcal{F}_i, \mathcal{N}_i)$, на отрезке $0<i<T$ гипотетическая кривая проводится "на глаз", исходя из допущения об экспоненциальном росте уловов в направлении к началу координат.

П. Оценки коэффициентов ε_i, а следовательно, – и F_1 можно получить через отношение уловов методом Клайдена, который был разработан для дискретной модификации модели Бивертона-Холта (Clyden, 1972). Согласно уравнению Баранова улов для впервые полностью вступившей в промысел возрастной группы будет

$$C_T = \frac{N_T F_T}{F_T + M}\left(1 - e^{-(F_T + M)}\right). \qquad (86)$$

Улов для предыдущей возрастной группы (Т – 1), выраженный через численность исходной группы T, имеет вид

$$C_{T-1} = N_T \frac{\varepsilon_{T-1} F_T}{\varepsilon_{T-1} F_T + M} \; \frac{\left(1 - e^{-(\varepsilon_{T-1} F_T + M)}\right)}{e^{(\varepsilon_{T-1} F_T + M)}}. \qquad (87)$$

Разделив уравнение (86) на выражение (87), получим соотношение

$$\frac{C_T}{C_{T-1}} = \frac{\varepsilon_{T-1} F_T + M}{\varepsilon_{T-1}(F_T + M)} \cdot \frac{1 - e^{-(F_T + M)}}{e^{(\varepsilon_{T-1} F_T + M)}\left(1 - e^{-(\varepsilon_{T-1} F_T + M)}\right)}, \qquad (88)$$

где единственным неизвестным является коэффициент ε_{T-1}.

Последовательно находя аналогичные выражения для $\frac{C_T}{C_{T-2}}$, $\frac{C_T}{C_{T-3}}$ и т.д., в результате получаем обобщенное выражение

$$\frac{C_T}{C_{T-k}} = \frac{\varepsilon_{T-k} F_T + M}{\varepsilon_{T-k}(F_T + M)} \; \frac{1 - e^{-(F_T + M)}}{e^{kM + F_T(\varepsilon_{T-1} + \varepsilon_{T-2} + \ldots + \varepsilon_{T-k})}\left(1 - e^{-(\varepsilon_{T-k} + M)}\right)}, \qquad (89)$$

которое используется для оценки возрастных коэффициентов ε_{T-k} ($K = 1, T - 1$).

Трансцендентное уравнение (89) решается относительно ε_{T-k} численными методами.

Помимо своего прямого назначения метод может оказаться полезным для уточнения возраста полного вступления поколения в промысловое стадо (см. определение 81).

2. КОГОРТНЫЙ АНАЛИЗ ПОУПА

Задавшись целью оценить влияние ошибок во входной информации на конечные результаты расчетов с помощью метода *VPA* Поуп (Pope, 1972) разработал упрощенный вариант анализа виртуальной популяции, который он назвал когортным анализом, понимая под когортой отдельное поколение.

Пользуясь принятыми выше обозначениями, запишем уравнение (48) в форме:

$$N_{i+1} e^{M} = N_i - N_i (1 - e^{-F_i}). \qquad (90)$$

Выразив N_i из уравнения улова (49) и подставив его во второй член правой части уравнения (90), получим

$$N_{i+1} e^{M} = N_i - C_i \left[\frac{(F_i + M)(1 - e^{-F_i})}{F_i (1 - e^{-(F_i + M)})} \right]. \qquad (91)$$

Поуп показал, что в диапазоне значений $M < 0{,}3$, $F < 1{,}2$ допустима замена

$$\frac{(F_i + M)(1 - e^{-F_i})}{F_i (1 - e^{-(F_i + M)})} \simeq e^{M/2}, \qquad (92)$$

причем ошибка такой аппроксимации не превышает 4%. С учетом формулы (92) выражение (91) примет вид

$$N_i = N_{i+1} e^{M} + C_i e^{M/2}. \qquad (93)$$

Принципиальное отличие уравнения (93) от исходной формы (48) заключается в замене гладкой экспоненциальной фучкции, согласно которой предполагается уменьшение численности эксплуатируемого поколения в традиционном методе VPA шаговой функцией, характеризующейся двумя особенностями:

1) снижение численности поколения, вызванное естественными причинами, происходит по экспоненциальному закону;

2) весь годовой улов берется точно в середине рассматриваемого временного интервала (как правило, один год).

Существо произведенной замены нетрудно проиллюстрировать графиком (рис. 7).

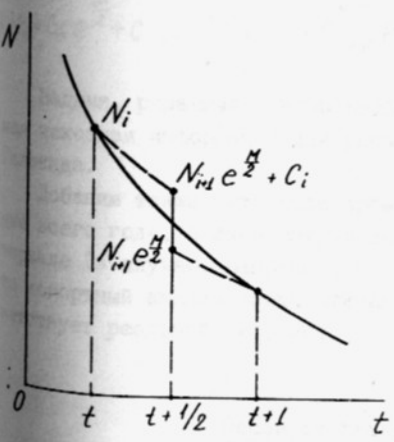


Рис.7. Представление годовых изменений численности поколения в когортном анализе Поупа

В рекуррентной форме уравнение выглядит следующим образом:

$$N_i = (C_i e^{M/2}) + C_{i+1} e^{3M/2} + \ldots + C_{i+k} e^{(2k+1)M/2} + \ldots + N_n e^{(n-i)M}. \quad (94)$$

При анализе уравнения (94) возможны два случая: когда n - индекс условно старшей возрастной группы неполностью обловленного поколения и когда n - индекс старшей возрастной группы полностью обловленного поколения.

В первом случае

$$N_n = \frac{C_n(F_n + M)}{F_n(1 - e^{-(F_n + M)})} \quad (95)$$

и

$$N_i = C_i e^{M/2} + C_{i+1} e^{3M/2} + \ldots + C_{i+k} e^{(2k+1)\frac{M}{2}} + \ldots + \frac{C_n(F_n + M) e^{(n-i)M}}{F_n(1 - e^{-(F_n + M)})}. \quad (96)$$

Во втором случае соответственно будет

$$N_n = \frac{C_n\ (F_n + M)}{F_n}, \quad (97)$$

$$N_i = C_i e^{\frac{M}{2}} + C_{i+1} e^{3\frac{M}{2}} + \ldots + C_{i+k} e^{(2k+1)\frac{M}{2}} + \ldots + \frac{C_n(F_n + M) e^{(n-1)M}}{F_n}. \quad (98)$$

Задачи, решаемые с использованием метода Поупа, как и требуемая исходная информация для расчетов, полностью аналогичны методу Галланда.

Добавим также, что если промысел ведется не равномерно в течение всего года, а сконцентрирован в достаточно узком временно́м интервале (в случае, например, сезонных ограничений на рыболовство), то когортный анализ предпочтительнее VPA, поскольку лучше соответствует реальной ситуации.

Последовательность расчетов методом когортного анализа Поупа

Когортный анализ заметно упрощает расчетную процедуру, позволяя избежать промежуточных расчетов (оценка r_i в методе VPA). В целом же, поскольку когортный анализ представляет собой упрощенный вариант анализа виртуальной популяции, особенности VPA сохраняются и в когортном анализе.

Если старшая возрастная группа n состоит из особей нескольких годовых классов, численность рассматриваемого поколения в начале года n оценивается по формуле

$$N_n = \frac{F_n + M}{F_n} \cdot C_n . \qquad (99)$$

Если старшая возрастная группа n состоит из особей только одного годового класса, N_n вычисляется по формуле

$$N_n = \frac{(F_n + M)\, C_n}{F_n (1 - e^{-(F_n + M)})} . \qquad (100)$$

Численность всех последующих (в сторону уменьшения возраста) годовых классов рассчитывается по основной формуле когортного анализа

$$N_i = (N_{i+1} e^{\frac{M}{2}} + C_i) e^{\frac{M}{2}} . \qquad (101)$$

Оценка промысловой смертности по возрастным группам выполняется по формуле

$$F_i = \ln (N_{i+1} / N_i) - M . \qquad (102)$$

Иногда необходимо определить среднее число особей данной возрастной группы в море

$$\bar{N}_i^* = \frac{N_i - N_{i+1}}{F_i + M} . \qquad (103)$$

Отметим, что величина $\bar{N}_i^*$ не равна среднеарифметической численности этой возрастной группы

$$\bar{N}_i = \frac{N_i + N_{i+1}}{2} . \qquad (104)$$

3. КОГОРТНЫЙ АНАЛИЗ ДЖОНСА

При анализе возрастных групп время жизни каждого поколения разбивают на равные интервалы, как правило, равные I году. Однако равенство интервалов-не принципиальное требование метода, а используется для удобства формализации. Эта особенность когортного анализа позволяет в качестве интервалов разбиения брать такие (в общем случае не равные между собой) временны́е интервалы, за которые длина особи увеличивается на заранее заданную величину ΔL. Условившись о начальной длине L_0, динамику численности отдельного поколения можно рассматривать в виде последовательности размерных групп, включающих особей, длины которых находятся в интервалах $(L_0+(i-1)\cdot\Delta L,\ L_0+i\Delta L)$, где $i = 1,2,\dots n$ – порядковый номер когорты.

Следовательно, обозначив через Δt период времени, в течение которого длина особи увеличивается на величину ΔL, можно переписать основное уравнение когортного анализа (93) следующим образом (Jones, 1981)

$$N_t = N_{t+\Delta t}\, e^{\Delta t M} + C_t\, e^{\Delta t \frac{M}{2}}, \qquad (105)$$

где N_t – начальная численность некоторой размерной группы;

$N_{t+\Delta t}$ – конечная численность той же размерной группы;

C_t – накопленный улов из данной группы на протяжении времени Δt.

Чтобы завершить переход от возрастных когорт к размерным необходимо воспользоваться законом роста, связывающим размер рыбы с возрастом. Наиболее распространенным в рыбохозяйственных исследованиях и в то же время одним из самых простых является уравнение Берталанффи

$$L_t = L_\infty\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right), \qquad (106)$$

где L_t – длина особи в возрасте t;

L_∞ – асимптотическая длина;

k – коэффициент катаболизма;

t_0 – условный возраст, при котором длина рыбы $= 0$.

Решив уравнение (106) относительно t, получим

$$t = t_0 - \frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{L_t}{L_\infty}\right). \qquad (107)$$

Если нижнюю границу произвольного размерного интервала обозначить через L_1, а его верхнюю границу $(L_1 + \Delta L)$ через L_2, то при помощи уравнения (107) можно определить промежуток времени Δt, за который рыба вырастет на величину $\Delta L = L_2 - L_1$:

$$\Delta t = \frac{1}{k} \ln \frac{L_\infty - L_1}{L_\infty - L_2}. \quad (108)$$

Существенно, что полученное выражение не зависит от параметра t_0, который, по мнению большинства исследователей, не имеет биологического смысла.

Подставив Δt в уравнение (105), после преобразований получим

$$N_1^{(L)} = N_2^{(L)} \cdot \left(\frac{L_\infty - L_1}{L_\infty - L_2}\right)^{\frac{M}{k}} + C_1 \left(\frac{L_\infty - L_1}{L_\infty - L_2}\right)^{\frac{M}{2k}}, \quad (109)$$

здесь $N_1^{(L)}$ и $N_2^{(L)}$ – численность рыб, имеющих длину L_1 и L_2;
C_1 – численность пойманных за год рыб в диапазоне линейных размеров (L_1, L_2).

Для удобства вычислений выражение (109) представляют в виде:

$$N_1^{(L)} = (N_2^{(L)} X_1 + C_1) X_1, \quad (110)$$

где

$$X_1 = \left(\frac{L_\infty - L_1}{L_\infty - L_2}\right)^{\frac{M}{2k}}. \quad (111)$$

Входными данными для метода Джонса являются:

размерный состав уловов в штуках, усредненный за ряд лет;

данные, необходимые для определения коэффициентов используемого в методе уравнения роста;

мгновенный коэффициент естественной смертности M, одинаковый для всех размерных групп;

коэффициент эксплуатации F/Z или численность последней размерной группы.

Метод позволяет получить:

оценку численности запаса (как сумму численностей отдельных размерных групп);

коэффициентов смертности (промысловой и общей) для всех размерных групп.

Метод также можно использовать для оценки последствий, вызванных изменением интенсивности или селективности промысла (Jones, 1974).

Последовательность расчетов методом когортного анализа Джонса

Расчеты, так же как и в методах анализа возрастного состава, выполняются последовательно, начиная со старшей группы. Коэффициент эксплуатации старшей возрастной группы $(F/Z)_n$ задается или предварительно оценивается. Как и в методах Поупа и VPA, выбор $(F/Z)_n$ мало сказывается на конечных результатах расчетов.

1. Для каждой размерной группы i вычисляются коэффициенты X_i по формуле (III)

$$X_i = \left(\frac{L_\infty - L_i}{L_\infty - L_{i+1}}\right)^{\frac{M}{2k}}$$

2. Оценивается начальная численность самой старшей размерной группы n

$$N_n = C_n / (F/Z)_n . \qquad (112)$$

3. Последовательно расчитываются значения начальных численностей всех остальных размерных групп в направлении от старшей к младшей:

$$N_{n-1} = (N_n X_{n-1} + C_{n-1}) X_{n-1};$$

$$N_{n-2} = (N_{n-1} X_{n-2} + C_{n-2}) X_{n-2}$$

и т.д.

4. Оцениваются величины $(Z\Delta t)_i$, соответствующие значению коэффициента общей смертности на интервале времени, за который особь успевает вырасти от нижней до верхней границы размерного диапазона (ΔL_i)

$$(Z\Delta t)_i = \ln(N_{i+1} / N_i). \qquad (113)$$

5. Оцениваются коэффициенты эксплуатации размерных групп как отношение улова за период $(\Delta t)_i$ к общему числу особей, погибших за тот же период:

$$(F/Z)_i = \frac{C_i}{N_i - N_{i+1}} . \qquad (114)$$

6. Оцениваются величины $(F\Delta t)_i$, соответствующие значению коэффициента промысловой смертности на интервале времени, за который особь успевает вырасти от нижней и верхней границы размерного диапазона (ΔL_i)

$$(F\Delta t)_i = (F/Z)_i \cdot (Z\Delta t)_i \qquad (115)$$

7. Оцениваются коэффициенты общей смертности для размерных групп:

$$Z_i = M/[1-(F/Z)_i]. \qquad (116)$$

8. Оцениваются коэффициенты промысловой смертности размерных групп:

$$F_i = Z_i - M. \qquad (117)$$

9. Оцениваются средние численности размерных групп в море:

$$\bar{N}_i^* = (N_i - N_{i+1})/Z_i \qquad (118)$$

Пример расчета приведен в табл. 17 (Babayan, Bulgakova, 1983). Объект - капская ставрида в подрайонах 1.3 + 1.4 ИКСЕАФ.

Входные данные: средний размерный состав уловов, разбитый на размерные группы по интервалам $\Delta L = 3$ (см); $M = 0{,}4$; $(F/Z)_n = 0{,}71$, $L_\infty = 62{,}5$ (см); $K = 0{,}109$.

Предложенный Джонсом подход не ограничивает использование в методе только закона роста Берталанффи. В некоторых случаях, эмпирическим данным может лучше соответствовать одно из других уравнений роста, показанных в предыдущей главе. Этот подход, в частности, реализован для уравнения роста Паркера-Ларкина. Используя это уравнение, интервал времени, необходимый особи, чтобы вырасти от нижней границы некоторого размерного интервала L_1 до его верхней границы L_2, можно выразить следующим образом

$$\Delta t = (L_2^Q - L_1^Q)/a, \qquad (119)$$

где Q, a - параметры уравнения Паркера-Ларкина.

Основное уравнение анализа размерных когорт (105) при подстановке в него Δt из предыдущего выражения примет вид:

Т а б л и ц а   I7

Последовательность расчетов методом Джонса
(для уравнения роста Берталанффи)

i	l_i ,см	C_i xI0^6	X_i	N_i xI0^6	$(Z\Delta t)_i$	$(F/Z)_i$	$(F\Delta t)_i$	Z_i	F_i	$\bar{N}_i$*
I	9,5-I2,5	3,I	I,II3	I47I2,34	0,2I4	0,00I	0,000	0,400	0,000	7096,38
2	I2,5-I5,5	6,4	I,I20	II873,79	0,227	0,003	0,00I	0,40I	0,00I	60I9,43
3	I5,5-I8,5	40,8	I,I28	9460,00	0,246	0,020	0,005	0,408	0,008	5052,23
4	I8,5-2I,5	249,7	I,I38	7398,69	0,298	0,I3I	0,039	0,460	0,060	4I4I,37
5	2I,5-24,5	453,5	I,I49	5493,66	0,377	0,263	0,099	0,543	0,I43	3I80,70
6	24,5-27,5	550,2	I,I62	3766,54	0,486	0,379	0,I84	0,644	0,244	2252,34
7	27,5-30,5	6I3,9	I,I76	23I6,03	0,702	0,526	0,369	0,844	0,444	I384,I0
8	30,5-33,5	370,4	I,I97	II47,85	0,848	0,564	0,478	0,9I7	0,5I7	7I5,56
9	33,5-36,5	I25,8	I,22I	49I,68	0,774	0,475	0,368	0,762	0,362	347,65
I0	36,5-39,5	8I,5	I,25I	226,77	I,045	0,554	0,579	0,897	0,497	I63,90
II	39,5-42,5	4I,0	I,29I	79,75	I,60I	0,644	I,03I	I,I24	0,724	56,64
I2	42,5-45,5	8,9	I,345	I6,09	I,954	0,644	I,258	I,I24	0,724	I2,29
I3	45,5-48,5	I,2	I,425	2,28	2,097	0,600	I,258	I,000	0,600	2,00
I4	48,5-5I,5	0,2	I,55I	0,28						

$$N_{1}^{(l)} = (N_{2}^{(l)} \cdot V_1 + C_1)V_1, \tag{120}$$

где

$$V_1 = exp\left[\frac{M}{2a}(L_2^{Q} - L_1^{Q})\right]. \tag{121}$$

Порядок расчетов, показанный выше для метода Джонса, полностью сохранится и в его модификации, только при вычислении начальных численностей вместо X_i используют коэффициенты V_i.

Результаты расчетов по исходным данным предыдущего примера и при a = 8,57 и Q = 1,25 представлены в табл. 18.

При анализе размерных когорт необходимо учитывать, что использование в качестве входных данных усредненного за некоторый период размерного состава уловов по существу сводит реальную ситуацию к уравновешенной. Чтобы сгладить последствия такой замены для оценок численности и коэффициентов смертности, желательно максимально расширить интервал усреднения, на котором расчитывается результирующий размерный состав уловов. Это наиболее формальный и простой способ. Возможны, однако, и другие приемы, повышающие репрезентативность размерного состава. Например, отбраковка данных за те годы, когда селективность промысла резко отличалась от этого показателя в соседние годы, - в начале освоения запаса, при переходе на новые орудия лова, при изменении размера ячеи и т.д. Такой подход позволяет получить более достоверные результаты, однако требует тщательного анализа пространственно-временно́го распределения промысловых усилий и статистики уловов за весь рассматриваемый период.

Достоинством метода анализа размерных когорт по сравнению с когортным анализом Поупа является то, что в силу объективных причин (точность и массовость изменений) размерный состав уловов определяется, как правило, с меньшими погрешностями, чем возрастной, и потому представляет собой более надежную основу для оценки величины запаса. Кроме того, в ряде случаев анализ размерного состава уловов предоставляет единственную возможность для получения количественной оценки эксплуатируемой популяции.

Метод Джонса менее трудоемок по сравнению с методами анализа возрастных когорт, поскольку не требует довольно сложных процедур "настройки".

Таблица 18

Последовательность расчетов модифицированным методом Джонса
(для уравнения роста Паркера-Ларкина)

i	l_i, см	C_i xI0^6	v_i	N_i xI0^6	$(Z\Delta t)_i$	$(F/Z)_i$	$(F\Delta t)_i$	Z_i	F_i	$\bar{N}_i^*$
I	9,5-I2,5	3,I	I,I70	27955,I0	0,3I5	0,0004	0,000	0,400	0,000	I8840,43
2	I2,5-I5,5	6,4	I,I8I	204I8,93	0,333	0,00I	0,000	0,400	0,000	I446I,55
3	I5,5-I8,5	40,8	I,I92	I4634,3I	0,355	0,009	0,003	0,404	0,004	I08I4,23
4	I8,5-2I,5	249,7	I,200	I0265,36	0,394	0,074	0,029	0,432	0,032	7742,4I
5	2I,5-24,5	453,5	I,208	6920,64	0,46I	0,I78	0,082	0,487	0,087	5243,33
6	24,5-27,5	550,3	I,2I5	4367,I4	0,556	0,296	0,I65	0,568	0,I68	3277,7I
7	27,5-30,5	6I3,9	I,222	2505,40	0,758	0,462	0,350	0,743	0,343	I790,04
8	30,5-33,5	370,4	I,227	II75,40	0,898	0,532	0,478	0,855	0,455	8I4,68
9	33,5-36,5	I25,8	I,233	478,85	0,808	0,473	0,382	0,759	0,359	350,33
I0	36,5-39,5	8I,5	I,239	2I2,95	I,073	0,583	0,625	0,959	0,559	I46,00
II	39,5-42,5	4I,0	I,244	72,94	I,633	0,697	I,I38	I,320	0,920	44,52
I2	42,5-45,5	8,9	I,249	I4,I7	I,980	0,729	I,443	I,476	I,076	8,27
I3	45,5-48,5	I,2	I,253	I,96	I,496	0,720	I,402	I,429	I,029	I,I8
I4	48,5-5I,5	0,2	I,258	0,28						

III. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЗАПАСА НА ОСНОВЕ ПРОМЫСЛОВОЙ СТАТИСТИКИ

В рыбохозяйственной науке чаще всего применяют математические методы оценки параметров изолированных, как правило, однородных (без учета возрастного состава) популяций. Это можно объяснить относительно малой разработанностью математических методов исследования сообществ и экосистем, отсутствием необходимой информации, а также тем, что определение оптимального режима эксплуатации одной популяции в значительной мере проще.

К числу наиболее простых методов, в которых используется минимальная биопромысловая статистика (улов и усилие), можно отнести методы Лесли (Leslie, 1948), Делари (De Lury ,1947),Бивертона-Холта (1969), Чепмана (Chapman, 1971,1974), Аллена (Allen, 1966) , (Бородин, 1974,1978,1982,1983; Borodin , 1976,1977), различные их модификации (Braaten, 1969) и др. Многие из этих методов описаны в отечественной литературе (Засосов, 1976) и здесь рассматриваться не будут.

В данном разделе основное внимание будет уделено методам , в основу которых положена гипотеза о том, что улов C_i на единицу промыслового усилия f_i в какой-то период времени пропорционален средней численности запаса ($\bar{N}_i$), т.е.

$$C_i/f_i = q\bar{N}_i \ , \qquad (122)$$

где q - коэффициент пропорциональности, характеризующий убыль запаса под действием единицы промыслового усилия.

Для использования методов данной группы необходима статистическая информация об уловах C_i в единицу времени и затрачиваемом промысловом усилии f_i (судо-сутки, судо-часы и т.д.), т.е. только промысловая статистика. Правда, в некоторые модификации вводятся дополнительные параметры (смертность, пополнение), но они считаются заранее известными.

Если рассматривается короткий период времени (например, сезон промысла), в течение которого можно принять, что естественная убыль и пополнение отсуствуют, то соотношение между средним запасом N_0 в начале периода и в интервале t можно записать как

$$\bar{N}_t = \bar{N}_0 - \sum_{j=0}^{t} C_j , \qquad (123)$$

где $\bar{N}_t$ - средняя численность запаса в интервале времени t;

$C_j = (C_i + C_{i+1})/2$.

Подставив в уравнение (122) вместо N его выражение для интервала времени t (123), получим уравнение регрессии добычи на единицу усилия от суммарной добычи (Leslie, 1948)

$$C_t/f_t = qN_0 - q\sum_{j=0}^{t} C_j \; . \qquad (124)$$

Решая это уравнение регрессии, можно найти численность N_0 и q.

Можно также использовать регрессию натурального логарифма добычи на единицу усилия от суммарного усилия $\sum_{i=0}^{t} f_i$ за период $(0 \div t)$ (DeLury, 1947). Для интервала t уравнение (124) может быть записано

$$C_t/f_t = q\bar{N}_0\,(\bar{N}_t/\bar{N}_0). \qquad (125)$$

Так как принято, что запас убывает под действием только промысла, то

$$\bar{N}_t = \bar{N}_0\, e^{-q\sum_{i=0}^{t} f_i} \qquad (126)$$

и уравнение (125) может быть представлено в виде

$$C_t/f_t = q\bar{N}_0\,(e^{-q\sum_{i=0}^{t} f_i}). \qquad (127)$$

Логарифмируя это уравнение, Делари получил выражение для определения N_0 и q

$$\ln(C_t/f_t) = \ln(qN_0) - q\sum_{i=0}^{t} f_i \; . \qquad (128)$$

Как видно, в этих уравнениях не принимается во внимание естественная убыль и считается, что коэффициент улавливаемости постоянен. Такие предпосылки, естественно, ограничивают возможности применения данных методов. Методы Лесли-Делари могут быть с успехом использованы при анализе непродолжительных периодов промысла.

Уравнение Лесли-Делари представляет собой уравнение регрессии. Например, уравнение Делари можно представить в виде

$$y_t = a + bx_t \; ,$$

где

$$y_t = \ln(C_t/f_t); \quad a = \ln(qN_0); \quad x_t = \sum_{i=0}^{t} C_i \; ; \quad b = -a$$

Параметры $\hat{a}$ и $\hat{b}$ можно найти при помощи формул

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x};$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t y_t - \bar{x}\sum_{t=1}^{T} y_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \bar{x}\sum_{t=1}^{T} x_t} \; ,$$

где T – число точек регрессии;

$\hat{N}_0$ и $\hat{q}$ определяют по формулам

$$\hat{N}_0 = (e^{-a})/-\hat{b} \quad \text{и} \quad \hat{q} = -\hat{b} \qquad (129)$$

Уравнение Делари и некоторые его модификации являются частными случаями обобщенного уравнения улова Бивертона-Холта (Braaten, 1969).

$$C_i = \left(\frac{q_i f_i}{q_i f_i + M_i}\right)\left[1 - e^{-t_i(q_i f_i + M_i)}\right]\left[N_0 e^{-\sum_{j=1}^{i-1} t_j \{(q_i f_i) - M_i\}}\right] \qquad (130)$$

где M_i – мгновенный коэффициент естественной смертности;

t_i – продолжительность сезона промысла в i-м интервале.

Первый из трех сомножителей в правой части уравнения выража - долю снижения численности запаса под действием промысла, второй казывает темп уменьшения запаса и третий - количество выживших обей.

Уравнение Делари можно получить из обобщенного уравнения Биртона-Холта, если принять, что естественная смертность отсутст - ет, $q_i = q$ для всех i и $t_i = I$ для всех i.

Тогда из уравнения (I30) получим

$$\ln(C_i/f_i) = \ln[N_0(1-e^{-qf_i})/f_i] - q\sum_{j=1}^{i-1} f_i. \qquad (I31)$$

Если qf_i мало, то можно приближенно взять

$$qf_i \approx (1-e^{-qf_i}) \qquad (I32)$$

придти к известному уравнению Делари.

Модификация метода Делари, в котором вводилась поправка на промысловое усилие, была продолжена Чепманом и Браатеном (Chapmen, 97I; Braaten, I969). В этих случаях уравнение Делари принимает вид

$$C_i/f_i = \left(\frac{1-e^{-qf_i}}{qf_i}\right) q N_0 e^{-q\sum_{j=1}^{i-1} f_j} \quad . \qquad (I33)$$

Так как можно взять

$$(1/qf_i)(1-e^{-qf_i}) \approx e^{-\frac{1}{2}qf_i}; \qquad (I34)$$

уравнение (I33) примет вид

$$C_i/f_i = (e^{-\hat{q}f_i})(\hat{q}\hat{N}_0 e^{-\hat{q}\sum_{j=1}^{i-1} f_i}). \qquad (I35)$$

гарифмируя его, получим

$$\ln(C_i/f_i) = \ln(\hat{q}\hat{N}_0) - \hat{q}\left(\sum_{j=1}^{i-1} f_j + \frac{1}{2}f_i\right). \qquad (I36)$$

Построение более адекватных моделей, основанных на данных по погодной добыче и промысловому усилию, связано с необходимостью едения в них наиболее важных факторов, влияющих на оценки чис - нности запасов (коэффициент естественной смертности, пополнение др.).

Коэффициент естественной смертности (M) можно учесть следую - им образом (Chapmen, I974). Для запаса, находящегося на первона - льном уровне (т.е., когда отсутствует промысел и естественная быль полностью компенсируется появляющимся пополнением R, запас ходится в равновесии с окружающей средой), можно записать

$$R_0 = N_0 - N_0 e^{-M} = N_0(1-e^{-M}). \qquad (I37)$$

Так как коэффициент естественной смертности M для крупных рских животных небольшой (M = 0,02-0,I0), то можно аппроксимировать $(I-e^{-M}) = M$ и записать

$$R_0 = MN_0 . \qquad (I38)$$

При сезонном промысле численность запасов в начале какого-либо сезона (0 ÷ t) можно записать уравнениями

$$N_1 = (N_0 - C_1) e^{-M} + R_1 ;$$
$$N_2 = (N_1 - C_2) e^{-M} + R_2 = N_0 e^{-2M} - C_1 e^{-2M} - C_2 e^{-M} + R_2 ;$$
$$\vdots$$
$$N_t = N_0 e^{-tM} - \sum_{i=1}^{t} C_i e^{-(t-i+1)} + \sum_{i=1}^{t} R_i e^{-(t-i)M} . \tag{139}$$

Считая, что в течение рассматриваемого периода $R = \text{const}$ и $R = MN_0$, можно выражение (139) записать в виде

$$N_t = N_0 - \sum_{i=1}^{t} C_i (1-M)^{t-i+1} . \tag{140}$$

Если в течение сезона добыча C_i бралась более или менее равномерно, то среднюю численность запаса в этом же сезоне можно выразить через численность запаса в начале сезона t и добычу

$$\bar{N}_j = N_j - \frac{1}{2} C_j \tag{141}$$

или в соответствии с выражением (140)

$$N_j = N_0 - \sum_{i=1}^{t-1} C_i (1-M)^{t-i} - \frac{1}{2} C_j . \tag{142}$$

Так как принято, что $C_t/f_i = qN_t$, то подставляя то N_t его выражение из (142), получим

$$C_j / f_j = q N_0 - q \left[\sum_{i=1}^{t-1} C_i (1-M)^{t-i} - \frac{1}{2} C_j \right] . \tag{143}$$

Здесь, как и ранее, используем линейную регрессию

$$y_i = a + bx_i ,$$

где y_i – улов на единицу усилия (индекс численности);
x_i – кумулятивный улов; $a = qN_0$; $b = -q$.

Покажем возможность применения данного метода для оценки запасов сейвалов в Северной части Тихого океана. Статистические данные по ежегодной добыче C_i и промысловому усилию f_i взяты из сборников Международной китобойной комиссии (IWC, 1967-1975) и работы Тиллмана (Tillman, 1975) и приведены в табл.19.

В табл. 20 приведены результаты расчетов накапливаемой добычи $\sum C (1-M)$ и оценки запаса при $M = 0{,}06$ и $R = MN_0$ за период 1967-1974 гг.

Данная модификация отличается от предыдущих тем, что здесь учитывается коэффициент M (который считается известным).

Дальнейшее уточнение методов данной группы можно получить введением параметра, учитывающего ежегодное пополнение запаса $R_i = r_i N_i$ (r_i – относительное пополнение промыслового запаса N_i).

Т а б л и ц а   I9

Данные по добыче C_i, промысловому усилию и добыче на единицу промыслового усилия C_i/f_i сейвалов Северной части Тихого океана

	Добыча C_i экз.	Промысловое усилие f_i, судосутки	Добыча на единицу усилия C_i/f_i	Год	Добыча C_i, экз.	Промысловое усилие f_i, судосутки	Добыча на единицу усилия C_i/f_i
7	6053	I6I8	3,74	I97I	2993	2022	I,48
8	3740	I805	3,I8	I972	2327	2059	I,I3
9	5I57	20I4	2,56	I973	I856	I484	I,25
0	4503	2297	I,96	I974	I280	I254	I,02

Однако для оценки r_i требуется дополнительная информация. В
зи с этим введение r_i в метод Делари связано с определенными тру-
тями. Проще использовать такую характеристику, как "чистое" от -
ительное промысловое пополнение, определяемое как разность (r_i -
$_i$) между относительным пополнением r_i и естественной убылью φ_{Hi}.
и принять гипотезу о постоянстве "чистого" относительного попол-
ия в течение рассматриваемого периода времени, то можно исполь -
эть следующий подход (Бородин, I982).

Т а б л и ц а   20

Оценки запасов N_i и накапливаемая добыча C_i в промысле сейвалов Северной части Тихого океана

	Накопленная добыча C_i (гол.)	Оценка запаса, N_i (гол.)	Год	Накопленная добыча C_i (гол.)	Оценка запаса, N_i (гол.)
7	3027	30050	I97I	I9779	II767
8	8560	24360	I972	2II63	I005I
9	I3923	I9306	I973	2I9I5	9064
0	I7I98	I5I03	I974	22II2	8579

$q_r = 0{,}14401 \times 10^{-3}$

Динамику запасов рыб для ряда лет можно представить рекур -
зной процедурой

$$N_2 = N_1 K_1 - C_1;$$

$$N_3 = N_2 K_2 - C_2 = (N_1 K_1 - C_1) K_2 - C_2 = N_1 K_1 K_2 - C_1 K_2 - C_2$$

$$\vdots$$

$$N_t = N_1 \prod^{t-1} K_i - \sum^{t-1} C \prod^{t-1} K_i,$$

(I44)

где $K_i = (1 + r_i - \varphi_{Mi})$;

r_i – относительное пополнение в году i;

φ_{Mi} – убыль от естественных причин в году i.

Если K = const, то формула (I44) принимает вид

$$N_t = N_1 K^{t-1} - \sum_{j=1}^{t-1} C_j K^{t-1}. \tag{I45}$$

Средняя численность промыслового запаса в первом году равна

$$\bar{N}_1 = N_1 - \frac{C_1}{2},$$

а в году t

$$\bar{N}_t = \left(N_1 \prod_{i=1}^{t-1} K_i - \sum_{j=1}^{t-1} C_j \prod_{i=j+1}^{t-1} K_i\right) - \frac{C_t}{2}.$$

Возьмем отношение средней величины запасов в первом году к ее величине в году t

$$\frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_t} = \frac{C_1/f_1}{C_t/f_t} = \frac{N_1 - \frac{C_1}{2}}{\left(N_1 \prod\limits_{i=1}^{t-1} K_i - \sum\limits_{j=1}^{t-1} C_j \prod\limits_{i=j+1}^{t-1} K_i\right) - \frac{C_t}{2}}$$

и, выразив отсюда N_1, получим:

$$N_1 = \frac{C_1/f_1 \left(\sum\limits_{j=1}^{t-1} C_j \prod\limits_{i=j+1}^{t-1} K_i + C_t/2\right) - C_1 C_t/2 f_t}{C_1/f_1 \prod\limits_{i=1}^{t-1} K_i - C_t/f_t}. \tag{I46}$$

Если к = const, то выражение для оценки N_1 запишется в более простом виде

$$N_1 = \frac{C_1/f_1 \left(K^{t-1} \sum\limits_{j=1}^{t-1} C_j + C_t/2\right) - (C_t/f_t)(C_1/2)}{C_1/f_1 K^{t-1} - C_t/f_t}. \tag{I47}$$

Рассмотрим предыдущий пример.

Подставив в выражение (I47) следующие значения $C_1/f_1 = 3{,}74$; $C_t/f_t = 1{,}02$; $K^{t-1} = 1{,}05^6 = 1{,}34$ (при $r - \varphi_M = 0{,}05$); $\sum\limits_{j=1}^{t-1} C_j = 25810$, находим

$$N_1 = \frac{3{,}74\ (1{,}34 \cdot 25810 + \frac{1280}{2}) - 1{,}02\ \frac{6053}{2}}{3{,}74 \cdot 1{,}34 - 1{,}02} = 32244 \text{ (гол.)}.$$

Желательно получить несколько таких оценок и взять среднюю.

Для оценки запасов с учетом естественной убыли и промыслового пополнения можно использовать метод Чепмана (Chapman, 1970)

$$C_t/f_t = q\left[N_0(1 + r - \varphi_M)_t - \sum_{i=0}^{t} C_i\right]. \tag{I48}$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение множественной регрессии. Для определения N_0 его можно разрешить путем следующих преобразований. Заменив $\sum\limits_{i=0}^{t} C_i$ на регрессию вида

$$\sum_{i=0}^{t} C_i = d_t + Z, \tag{I49}$$

уравнение (23) можно записать как

$$C_t/f_t = q\left[N_0(1+r-\varphi_m)-d_t-Z\right] = q(N_0-Z)+q\left[N_0(r-\varphi_m)-d_t\right].$$

Или, принимая $(r-\varphi_m) = const$, запишем

$$C_t/f_t = a + bt,$$

где $a = q\,(N_0 - Z)$; $b = q\left[N_0(r-\varphi_m)-d\right]$.

Взяв отношение

$$h = \frac{a}{b} = \frac{N_0 - Z}{\left[N_0(r-\varphi_m)-d\right]},$$

численность запаса N_0 найдем из уравнения

$$N_0 = \frac{Z - dh}{1-(r-\varphi_m)h}. \qquad (I50)$$

Для использования этого метода требуются данные по ежегодной добыче C_i , промысловому усилию f_i и "чистому" относительному пополнению $(r-\varphi_H)$, причем $(r-\varphi_H) = const$. Достоинство данного метода – учет факторов пополнения и естественной убыли, недостаток – необходимость дополнительных исследований для оценки $(r-\varphi_H)$ и принятие гипотезы о постоянстве $(r-\varphi_H)$ за весь рассматриваемый период времени).

Для примера возьмем статистические данные по промыслу антарктических финвалов во II секторе. Данные взяты из сборников МКК (IWC ; I958-I966) и работы (Chapman , I97I) и приведены в табл.2I.

Таблица 2I

Данные по добыче С и добыче на единицу промыслового усилия C_i/f_i и накапливаемая добыча финвалов II сектора Антарктики

Сезон	Добыча, гол. C_i	Добыча на единицу усилия, гол/судодни, C_i/f_i	i	$\sum C_i$
I957/58	52II	2,35	0	2600
I958/59	4298	2,57	I	7400
I959/60	4920	I,65	2	I2000
I960/6I	5223	I,65	3	I7000
I96I/62	6650	I,22	4	23000
I962/63	5570	I,30	5	29I00
I963/64	7319	I,23	6	35500

Находим параметры регрессии $\sum C_i$ по i; $\sum C_i = 54{,}68i + 16{,}82$ и $d = 54{,}68$; $Z = 16{,}82$.

Затем находим коэффициент регрессии C_i/f_i по i $C_i/\ i = 2{,}388 - 0{,}266i$ и а = 2,388, в = – 0,226, $h = 10{,}57$.

Приняв чистое относительное пополнение $(r-\varphi_H) = 0{,}05$, найдем оценку запаса

$$N_0 = \frac{(16{,}82)+(10{,}57)(54{,}68)}{1+(0{,}05)(10{,}57)} = 38913 \text{ (гол.)}.$$

Преимущества этого метода таковы: во-первых, для их использования достаточно минимальной исходной информации (ежегодная добыча C_i и промысловое усилие f_i), во-вторых, с их помощью можно учесть такие важные факторы, как естественная убыль $\varphi_м$ и относительное пополнение r. Недостатками являются гипотезы о пропорциональной зависимости между добычей на единицу промыслового усилия (C_i / f_i) и средней численностью запаса $(\bar{N}_i)$, а также необходимость введения дополнительных допущений и расчетов при оценке "чистого" относительного промыслового пополнения $(r - \varphi_м)$.

Для оценки численности промыслового запаса N_c, коэффициента улавливаемости q и убыли от естественных причин $\varphi_м$ по отдельности могут быть применимы некоторые из рассмотренных выше моделей; в них основные уравнения приведены к виду, позволяющему воспользоваться методами линейного регрессионного анализа.

Однако часто использование этих моделей не эффективно, так как зависимости между параметрами носят нелинейный характер. В таких случаях основные параметры можно оценить при помощи нелинейных моделей. Тогда предпочтительнее нелинейную модель представить в форме, допускающей использование линейных аддитивных уравнений. Ранее (Бородин, 1978, 1983) был предложен обобщенный нелинейный метод оценки сразу трех параметров N, q и $\varphi_м$ при той же самой исходной информации.

Будем считать, что первоначальная численность промыслового запаса N_{c1}, коэффициент улавливаемости q и естественная убыль $\varphi_м$ - постоянные параметры (используются во всех применяемых на практике моделях). Тогда относительное пополнение r_t, промысловое усилие f_t и фактическую добычу C_t примем как текущие характеристики.

Возьмем также известные в теории рыболовства соотношения между возможной добычей C_t и промысловым запасом N_{ct}

$$C_t = q_t \bar{N}_{ct} , \tag{151}$$

где $\bar{N}_{ct}$ - средняя численность запаса, которая может быть представлена в виде

$$\bar{N}_{ct} = N_{ct} - \frac{C_t}{2} . \tag{152}$$

Запишем для ряда лет

$$N_{c2} = (N_{c1} - C_1) e^{-M} + R_2$$

или, поскольку $e^{-M} = 1 - \varphi_м$ и $R_t = r_t N_{ct}$, то

$$N_2 = \frac{(N_{c1} - C_1)(1 - \varphi_м)}{1 - r_2} ;$$

$$N_3 = \frac{(N_{c1} - C_1)(1 - \varphi_{м1})(1 - \varphi_{м2})}{(1 - r_2)(1 - r_3)} - \frac{C_2 (1 - \varphi_{м2})}{1 - r_3} ;$$

$$\vdots$$

$$N_{ct} = \frac{N_{c1} \prod_{i=1}^{t-1} (1 - \varphi_м)_i}{\prod_{j=2}^{t} (1 - r_j)} - \sum_{i=1}^{t-1} C_i \frac{(1 - \varphi_м)_i}{(1 - r)_i}$$

где φ_{Mi} – убыль запаса от естественной смертности.

Если $\varphi_M = const$, то

$$N_{ct} = \frac{N_{c1}(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod_{j=2}^{t}(1-r)_j} - \sum_{i=1}^{t-1} C_i \frac{(1-\varphi_M)^{t-i}}{\prod_{=i+1}^{t}(1-r)_j} . \qquad (154)$$

При постоянном относительном пополнении $r = const$, имеем

$$N_{ct} = N_{c1}\left(\frac{1-\varphi_M}{1-r}\right)^{t-1} - \sum_{i=1}^{t-1} C_1 \left(\frac{1-\varphi_M}{1-r}\right)^{t-i} . \qquad (155)$$

Принимая $\varphi_M = const$ и подставив (155) и (152) и затем в (151), получим

$$C_t = q f_t \left[\frac{N_{c1}(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod_{j=2}^{t}(1-r)_j} - \sum_{i=1}^{t-1} C_i \frac{(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod_{=2}^{t}(1-r)} - \frac{C_i}{2}\right] . \qquad (156)$$

Следовательно, ожидаемая добыча C_t есть функция численности первоначального запаса N_{c1}, относительного промыслового пополнения r_j, промыслового усилия f_i, коэффициента улавливаемости q и естественной убыли φ_M, т.е.

$$C_t = \Psi(f_t ; r_t ; N_{c1} ; q ; \varphi_M) = \Psi(\vec{X} ; \vec{B}) , \qquad (157)$$

где $\vec{X} = (r_t ; f_t)$ – независимые переменные (исходные данные);

$\vec{B} = (N_{c1} ; q ; \varphi_M)$ – значения параметров запаса.

Располагая исходными данными по ежегодной добыче C_i ($i = 1, 2, 3, \ldots t$) оценить величину B можно путем минимизации суммы квадратов отклонений теоретически ожидаемой добычи C_i^T от фактической C_i^Φ

$$\sum_{i=1}^{t} (C_i^T - C_i^\Phi)^2 \longrightarrow \min \qquad (158)$$

Поскольку мы получим систему трансцендентных уравнений, то предлагается следующий метод определения параметров Nc1, q и φ_M.

Обозначив через D_1 разность между наблюдаемыми и рассчитываемыми значениями C_i, можем записать уравнения для D_i в виде

$$D_i = \Psi(f_i ; r_i ; N_{c1} ; q ; \varphi_M) - C_i . \qquad (159)$$

Допустим, что известны приближенные значения B для истинных значений параметров запаса B. На каждом шаге итерации можно исправить B на достаточно малую величину ΔB. Таким образом, получим векторное уравнение $\vec{B} = \vec{b} + \Delta b$. Подставим это уравнение в (159), получим t уравнений вида

$$D_i + C_i = \Psi(f_i ; r_i ; b_1 + \Delta b ; b_2 + \Delta b_2 ; b_3 + \Delta b_3) . \qquad (160)$$

Воспользовавшись формулой Тейлора для функции нескольких переменных и пренебрегая производными второго и более высоких порядков, функции в правой части уравнений (I60) можно разложить в ряд

$$\mathcal{D}_i + C_i = \Psi(f_i; r_i; B_1; B_2; B_3) + \Delta B_1\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial B_1}\right) + \Delta B_2\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial B_2}\right) + \Delta B_3\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial B_3}\right). \quad (I6I)$$

Система t уравнений может быть записана в виде

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta B_j\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial B_j}\right) + \Psi(\vec{X}; \vec{B}) - C_i, \quad (I62)$$

или

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta B_j\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial B_j}\right) + d_i, \quad (I63)$$

где

$$d_i = \Psi(\vec{X}; \vec{B}) - C_i.$$

Искомые значения ΔB_j, находим методом наименьших квадратов (на каждом этапе итерации ищем вектор $\Delta \vec{B}$, который минимизирует сумму квадратов членов $\mathcal{D}_i$).

Тогда имеем

$$\sum_i^t \mathcal{D}_i^2 = \sum\left[\sum_{j=1}^{3} \Delta B_j\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial B}\right) + d_i\right]^2. \quad (I64)$$

Минимизируем для нашего случая сумму отклонений C_t^T (теоретического выражения (C^T) от C_t^Φ (фактического):

$$\mathcal{D}^2 = \left[\left(\frac{N_{c1}(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=2}^{t}(1-r)_j} - \sum_{i=1}^{t-1} C_i \frac{(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=i+1}^{t}(1-r)_j} - \frac{C_t}{2}\right) q f_t - C_t\right]^2 \to min \quad (I65)$$

В соответствии с выражением (I6I) запишем

$$\left[\left(\frac{N_{c1}(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=2}^{t}(1-r)_j} - \sum_{i=1}^{t-1} C_i \frac{(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=i+1}^{t}(1-r)_j} - \frac{C_t}{2}\right) q f_t\right] + \frac{\partial C_t}{\partial N_{c1}}\Delta B_1 + \frac{\partial C_t}{\partial q}\Delta B_2 + \frac{\partial C_t}{\partial \varphi_M}\Delta B_3 - C_t. \quad (I66)$$

Найдем частные производные по N_{c1}, q и φ_M.

$$\frac{\partial C_t}{\partial N_{c1}} = \frac{(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=2}^{t}(1-r)_j} q f_t; \quad (I67)$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial q} = \left[\frac{N_{c1}(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=2}^{t}(1-r)_j} - \sum_{i=1}^{t} C_i \frac{(1-\varphi_M)^{t-1}}{\prod\limits_{j=i+1}^{t}(1-r)_j} - \frac{C_t}{2}\right] f_t;$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial \varphi_M} = \left[- \frac{N_{c1}(t-1)(1-\varphi_M)^{t-2}}{\prod\limits_{=2}^{t}(1-r)} + \sum_{i=1}^{t-1} C_i \frac{(t-1)(1-\varphi_M)^{t-2-i}}{\prod\limits_{j=i+1}^{t}(1-r)_j} \cdot \frac{C_t}{2}\right] q f_t.$$

При помощи этих формул можно определить первоначальный промысловый запас N_{c1}, коэффициент улавливаемости q и естественную убыль φ_M.

Рассмотрим несколько возможных модификаций этого метода (Бородин, 1982, 1983).

В некоторых случаях удобнее пользоваться "чистым" относительным пополнением ($r - \varphi_M$); r_i – относительное пополнение в году $i + 1$, равное

$$r_i = (R_{i+1})/N_i, \tag{168}$$

где φ_M – относительная величина естественной убыли.

Тогда рекуррентную формулу можно записать в виде

$$N_{i+1} = N_i + r_i N_i - \varphi_M N_i - C_i, \tag{169}$$

или

$$N_{i+1} = N_i K_i - C_i,$$

где

$$K_i = 1 + (r - \varphi_M)_i.$$

Для ряда лет можем записать в соответствии с формулой (144)

$$N_t = N_{c1} \prod_{i=1}^{t-1} K_i - \sum_{j=1}^{t-1} C \prod_{i=j+1}^{t-1} K_i. \tag{170}$$

Выразив теоретическую величину C_t^T в соответствии с уравнением (170) и подставив в (158), запишем

$$U = \sum_{t=1}^{T} \left[C_t \left(1 + \frac{q f_t}{2}\right) - q f_t N_t\right]^2 \to \min. \tag{171}$$

Подставив выражение (170) в (171), получим

$$U = \sum_{t=1}^{T} \left[C_t \left(1 + \frac{q f_t}{2}\right) - q f_t \left(N_{c1} \prod_{i=1}^{t-1} K_i - \sum_{j=1}^{t-1} C \prod_{i=j+1}^{t-1} K_i\right)\right]^2 \to \min. \tag{172}$$

Взяв частные производные, получим систему двух уравнений, решение которой даст оценки N_{c1} и q.

Если "чистое" относительное пополнение постоянно ($K = const$), то выражение (172) запишется в более простом виде

$$U = \sum_{t=1}^{T} \left[C_t \left(1 + \frac{q f_t}{2}\right) - q f_t \left(N_{c1} K^{t-1} - \sum_{j=1}^{t-1} C_j K^{t-1}\right)\right] \to \min. \tag{173}$$

Если добыча неравномерно распределена в течение сезона, то можно использовать известные в теории рыболовства соотношения

$$C_t = E_t N_t \tag{174}$$

или

$$C_t = N_t \frac{F_t}{F_t + M_t} \left(1 - e^{-(F_t + M_t)}\right),$$

(I75)

где E_t – степень эксплуатации в году t.

Приводя выражения для ежегодной добычи в соответствие с формулами (I74) и (I75), получим

$$F_t \bar{N}_t = \frac{F_t N_t}{F_t + M_t}\left(1 - e^{-(F_t + M_t)}\right),$$

откуда

$$\bar{N}_t = \frac{N_t}{F_t + M_t}\left(1 - e^{-(F_t + M_t)}\right).$$

(I76)

Тогда теоретически рассчитанная добыча C_t^T в году t в соответствии с формулой (I75) запишется как

$$C_t^T = \frac{N_t}{q f_t + M_t}\left(1 - e^{-(q f_t + M_t)}\right) q f_t . \qquad (I77)$$

Выражение (I72) в соответствии с выражением (I77) примет вид

$$U = \sum_{t=1}^{T}\left[C_t - \frac{q f_t}{q f_t + M_t}\left(N_{c_1}\prod_{i=1}^{t-1}K_i - \sum_{j=1}^{t-1}C_j\prod_{i=j+1}^{t-1}K_i\right)\left(1 - e^{-(q f_t + M_t)}\right)\right]^2 \to \min$$

(I78)

или в соответствии с формулой (I74) может быть записана в более компактной форме

$$U = \sum_{t=1}^{T}\left[C_t - E_t\left(N_{c_1}\prod_{i=1}^{t-1}K_i - \sum_{j=1}^{t-1}C_j\prod_{i=j+1}^{t-1}K_i\right)\right]^2 \to \min . \qquad (I79)$$

Из этого выражения можно определить N_{c_1} и q.

Если данные по промысловому усилию f_i предпочтительнее (в смысле доступности или надежности), чем сведения о ежегодной до - быче C_i, или известна степень эксплуатации E за рассматриваемый период времени, то для ряда лет можно записать $N_2 = N_1 K_1 - C_1$ или в соответствии с (I70)

$$N_2 = N_1 K_1 - E N_1 = N_1 (K - E)_1 ;$$

$$N_3 = N_1 (K - E)_1 (K - E)_2 ;$$

$$\vdots$$

$$N_t = N_1 \prod_{i=1}^{t-1}(K - E)_i . \qquad (I80)$$

Если (K–E) = const , то выражение (I80) примет вид

$$N_t = N_1 (K-E)^{t-1}. \tag{I81}$$

Теоретическую величину добычи в соответствии с формулой (I74) можно представить как

$$C_t = N_1 \prod_{i=1}^{t-1} (K-E)_i E_t . \tag{I82}$$

С учетом уравнения (I82) можно записать

$$U = \sum_{t=1}^{T} \left[C_t - N_1 \prod_{i=1}^{t-1} (K-E)_i E_t \right]^2 \to min , \tag{I83}$$

или при (K–E) = const

$$U = \sum_{t=1}^{T} \left[C_t - N_1 (K-E)^{t-1} E_t \right]^2 \to min. \tag{I84}$$

Параметры N_1 и q (или E) находят так же, как в предыдущих модификациях.

Конечные аналитические выражения для оценки N_1 , q и $\varphi_н$ довольно громоздкие. Например, для самого простого случая $(r - \varphi_н) =$ $=$ const и $\varphi_н$ известно конечные формулы имеют вид:

$$N_1 = \frac{(\sum C_t^2 f_t + \sum C_t f_t B_t)(-\sum C_t f_t A_t - 2\sum f_t^2 A_t^2 B_t) - (-4\sum C_t f_t A_t)(\frac{1}{2}\sum C_t^2 f_t^2 + \sum C_t f_t^2 A_t B_t + \sum f_t^2 B_t^2 A_t^2)}{(\sum C_t f_t^2 A_t - 2\sum f_t^2 A_t^2 B_t)(-2\sum C_t f_t A_t) - 2(\sum f_t^2 A_t^2)(\sum f_t C_t^2 + \sum C_t f_t B_t)} \tag{I85}$$

и коэффициент улавливаемости

$$q = \frac{(-\sum C_t f_t A_t - 2\sum f_t^2 A_t B_t)(-2\sum C_t f_t A_t) - (-2\sum f_t^2 A_t^2)(\sum f_t C_t^2 + \sum C_t f_t B_t)}{(4\sum f_t A_t^2)(\sum C_t^2 f_t^2 + \sum C_t f_t^2 A_t B_t + \sum f_t^2 B_t^2 A_t^2) - (\sum C_t f_t^2 A_t - 2 f_t^2 A_t^2 B_t)^2} ,$$

где $A_t = K^{t-1}$ и $B_t = C_1 K^{t-2} + C_2 K^{t-3} + \ldots + C_{t-1}$.

Покажем возможность применения последней модификации нелинейного метода для оценки первоначального запаса N_1 антарктических сейвалов во II секторе.

Исходные данные по ежегодной добыче, C_i (шт.), промысловому усилию f_i (судосутки) и добыче на единицу промыслового усилия , C_i / f_i взяты из сборников Международной китобойной комиссии (IWC, I960–I977) и работы (Бородин, I978) и приведены в табл. 22.

Т а б л и ц а 22

Добыча C_i (в шт.) и добыча на единицу промыслового усилия C_i/f_i (в шт./ судосутки)

Сезон	Добыча		Сезон	Добыча	
	C_i	на единицу промыслового усилия C_i/f_i		C_i	на единицу промыслового усилия C_i/f_i
1961/62	1249	0,15	1969/70	1298	1,62
1962/63	1812	0,30	1970/71	640	0,48
1963/64	4150	0,49	1971/72	270	0,24
1964/65	15584	1,50	1972/73	98	0,10
1965/66	12718	1,96	1973/74	3	0,01
1966/67	1553	1,43	1974/75	4	0,02
1967/68	194	0,34	1975/76	516	0,40
1968/69	188	0,64	1976/77	83	0,14

Для расчетов "чистое" относительное пополнение (полученное другим методом) было взято равным $(r - \ell_H) = 0,04$.

Подставив исходные данные в выражения (185), находим оценки первоначального запаса сейвалов во II секторе $N_1 = 49,3$ тыс.шт. и коэффициента $q = 0,1109 \cdot 10^{-4}$.

Более сложным частным случаем обобщенного нелинейного метода является метод Аллена. Для определения N_1 и q, кроме статистических данных по C_i и f_i, необходимо иметь оценки М и r_i, которые могут быть получены каким-либо из методов. Алленом (Allen, 1966) также был предложен метод для оценки относительного пополнения r_i, однако он довольно громоздок, требует промежуточных расчетов и надежной статистической информации о возрастном составе за длительный период исследований.

В основе метода Аллена лежит выражение

$$\sum_{t=1}^{T}\left[C_t\left(1+\frac{q f_t}{2}\right)-q f_t N_t\right]^2 \longrightarrow min\,, \tag{186}$$

где

$$N_t = H_t\left[N_1 - \Psi(C)_{t-1}\right]; \quad H_t = \frac{e^{-(t-1)M}}{\prod_{i=2}^{t}(1-r_i)}$$

и

$$\Psi(C)_{t-1} = C_1 + \sum^{t-1} \frac{C_i}{M_i}\,.$$

Для оценки ежегодного коэффициента пополнения r_i можно использовать метод Аллена (Allen, 1966; Бородин, 1974). При помощи метода Аллена оценивается совокупность особей, полностью и частично уязвимых для данных орудий лова. При этом необходимо знать возрастной состав улова по крайней мере для двух последовательных лет.

В основе метода лежит отношение

$$B_{a,i} = \frac{P_{a+1,\,i+1} / Q_{t_c+1,\,i+1}}{P_{a,i} / Q_{t_c,i}}, \tag{187}$$

где $P_{a,i}$ – количество или доля особей в добыче а-ой, частично пополненной возрастной группы в году i ;

$P_{a+1,\,i+1}$ – количество или доля особей в добыче $(a+1)$ - ой возрастной группы в году $i+1$;

$Q_{t_c,i}$ – количество или доля особей в добыче, полностью вступивших в промысел возрастных групп, начиная с возраста t_c и выше, в году i ;

$Q_{t_c+1,\,i+1}$ – количество или доля особей в добыче всех возрастных групп, начиная с возраста t_c+1 и выше, в году $i+1$.

Для нового пополнения в пополненной части $(a+1)$-ой возрастной группе в году $i+1$ находится как

$$P_{a+1,\,i+1} = \frac{B_{a,i} - T}{B_{a,i}}, \tag{188}$$

где $T = \frac{e^{-(M_{t_c}+F_i)}}{e^{-(M_i+F_i)}}$ – отношение коэффициента выживания полностью вступивших в промысел возрастных групп, к коэффициенту выживания уязвимых для промысла рыб, частично вступивших в промысел групп.

Поскольку можно допустить, что коэффициент естественной смертности одинаков для уязвимых рыб как полностью, так и частично вступивших в промысел возрастных групп, то можно принять, $T = 1{,}0$.

Общая доля нового пополнения эксплуатируемого запаса в году i (коэффициент ежегодного промыслового пополнения r_i) определяется как

$$r_i = \sum_{a=0}^{t_c-1} P_{a,i} \tag{189}$$

Этот метод имеет то преимущество перед другими, что зависит только от наличия и надежности данных по возрастному составу.

Покажем на примере возможность применения методов Аллена.

В табл. 23 приведен возрастной состав сейвалов, добытых в период 1963-1974 гг. в Северной Пацифике (IWC; 1963-1976, Tillman, 1977). Возраст, в котором особи полностью становятся объектом промысла, в данном районе составляет 16 лет.

Таблица 23

Возрастной состав сейвалов, добытых в Северной части Тихого океана за период I963-I974 гг.

Возраст / годы	I963	I964	I965	I966	I967	I968	I969	I970	I97I	I972	I973	I974
2	5	3	II	I9	24	25	28	23	I9	I4	I3	9
3	I4	I0	28	47	65	63	67	63	47	34	27	22
4	27	22	56	I05	I30	I32	I36	I23	97	73	6I	45
5	20	I9	39	67	92	96	9I	80	60	46	38	28
6	22	2I	42	74	98	I0I	95	83	63	52	40	3I
7	32	29	6I	I04	I37	I39	I4I	I25	88	68	49	40
8	37	39	70	II2	I62	I7I	I6I	I37	97	74	58	43
9	44	4I	80	I32	I83	I85	I77	I56	II2	85	69	5I
I0	38	40	64	I0I	I57	I55	I4I	I25	86	66	5I	38
II	38	40	68	II0	I8I	I6I	I52	I32	87	68	55	40
I2	54	55	95	I49	2I6	2I2	I94	I68	II4	87	72	50
I3	55	55	96	I56	220	222	207	I79	I23	95	76	56
I4	42	45	74	II5	2I5	I7I	I6I	I4I	9I	68	57	39
I5	42	45	74	I06	I53	I44	I30	I09	70	53	43	28
I6	67	69	II3	I76	265	263	236	208	I35	I04	8I	60
I7	6I	64	I05	I70	238	233	2I9	I8I	I30	97	79	54
I8	59	62	I04	I65	239	233	2I5	I90	I3I	97	80	55
I9	57	64	98	I50	238	224	I98	I68	II3	86	70	48
20	46	46	79	II4	I62	I48	I35	II5	75	55	46	29
2I	49	52	80	I20	I79	I69	I5I	I26	82	62	50	33
22	55	59	96	I43	209	I97	I77	I48	99	76	62	40
23	57	62	93	I45	2II	208	I88	I58	I02	77	64	4I
24	56	58	92	I38	245	I96	I79	I5I	94	72	62	37
25	48	48	8I	I2I	I7I	I65	I50	I28	82	64	52	34
26	457	483	742	I,096	I,693	I,574	I,379	I,I80	743	562	478	297
Всего	I,452	I,53I	2,54I	3,935	5,883	5,587	5,I08	4,397	2,940	2,235	I,833	I,248

В табл.24 приведены значения (в %) частичного пополнения R^a в добыче сейвалов (возраст полного пополнения 16 лет) и коэффициенты ежегодного пополнения запаса сейвалов в Северной Пацифике за период 1963-1974 гг.

Ежегодные добыча C_i и промысловое усилие f_i взяты из табл.19.

Т а б л и ц а 24

Количество сейвалов (над чертой, в %), частично вступивших в промысел (возраст полного пополнения 16 лет) и коэффициент ежегодного промыслового пополнения r_i запаса сейвалов в Северной части Тихого океана

Годы	R^a/r_i	Годы	R^a/r_i
1963	31,7 / –	1969	36,8 / 0,10641
1964	30,3 / 0,05783	1970	37,4 / 0,10241
1965	33,8 / 0,11792	1971	39,3 / 0,12355
1966	35,5 / 0,10878	1972	39,5 / 0,11062
1967	34,6 / 0,7171	1973	40,3 / 0,09190
1968	35,4 / 0,10015	1974	41,7 / 0,15170

Результаты расчетов приведены в табл.25.

Т а б л и ц а 25

Величины запаса и добычи (в шт.)

Сезон	Запас	Добыча фактическая $C^Ф$	Добыча ожидаемая C^T	$C^Ф - C^T$
1967	30424	6053	6114	-61
1968	25506	5740	5640	100
1969	20832	5157	5082	75
1970	16446	4503	4491	12
1971	12833	2993	3155	-162
1972	10420	2327	2619	-292
1973	8893	1856	1534	322
1974	7257	1280	1151	130

$q = 0,137997 \; 10^{-3}$

Таким образом, есть все основания полагать, что нелинейный метод и его модификации в зависимости от наличия той или иной исходной информации и ее надежности могут быть применены для анализа состояния запасов и промысла многих эксплуатируемых видов.

Преимуществом метода и его модификацией является то, что в нем учитываются ежегодно изменяющиеся естественная убыль и промысловое пополнение, а также используется сравнительно простой аналитический аппарат, имеющий достаточное теоретическое обоснование. Все это позволяет надеяться на более широкое применение данного метода и его модификаций.

IУ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Математические модели популяций рыб в последние годы широко применяют в практике рыбохозяйственных исследований. Доступность моделирования как метода, при помощи которого можно выявить механизм процесса и понять его структурные особенности, позволяет с успехом использовать его при оценке состояния запаса и промысла объектов рыболовства. В то же время любая математическая модель - это идеализированное, абстрактное построение, которое не всегда полностью соответствует действительности. Система допущений и ограничений, вводимая при постороении модели, часто нарушает адекватность модели существующему в природе аналогу, а это может привести к нереальным результатам или неправильному их толкованию. Чтобы избежать этого, необходимо ясно представлять себе возможности использования того или иного типа моделей, соблюдать определенные правила при сборе и предварительной обработке необходимой для расчетов первичной информации и анализе полученных результатов.

В зависимости от типа математической модели и принимаемых допущений популяцию можно рассматривать в целом, когда естественный прирост запаса (продуктивность) определяется его величиной (продукционные модели). В этом случае игнорируются внутренние связи в популяции. Продукционные модели достаточно хорошо проанализированы в отечественной литературе (Засосов,1976; Локшина, 1978). Наиболее подробный анализ практического применения моделей этого типа, точнее регрессионных аналогов продукционных моделей, которыми пользуются при анализе промысла, дан в методических рекомендациях к оценке параметров рационального промыслового режима (Бабаян, 1982). В связи с этим в данной работе не рассмотрены модели этого типа.

В противоположность рассмотрению популяции в целом, аналитические модели строят с учетом разделения процессов пополнения, роста и смертности. При определенных допущениях некоторые параметры можно принимать постоянными (например, пополнение и естественная смертность). Тогда величина запаса будет определяться изменениями роста и промыслового воздействия. В более сложных моделях возможен учет флюктуации пополнения (например, в зависимости от величины нерестового запаса) и изменения величины естественной смертности с возрастом.

Основоположником теории рыболовства и развития математических моделей аналитического типа является советский ученый Ф.И.Баранов. Им впервые была выведена аналитическая зависимость основных закономерностей динамики промыслового запаса (Баранов, 1971а; 1971б).

В основе простроения всех аналитических моделей лежит установленная им зависимость изменения численности поколений рыб с возрастом:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -Z \cdot N(t). \qquad (190)$$

Это выражение означает, что уменьшение количества рыб в поколении в элементарный промежуток времени пропорционально численности запаса и мгновенному коэффициенту общей смертности Z. Решается уравнение (190) следующим образом:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-zt}, \qquad (191)$$

где: N_t – значение численности в момент времени ;

N_0 – начальная численность;

Z – мгновенный коэффициент общей смертности.

Уравнение (191) показывает, что численность запаса рыб изменяется по убывающей экспоненте.

Исходя из уравнения (190), величина возможного улова (в единицах массы) определяется как: $\frac{dY}{dt} = F \cdot N(t) \cdot w(t).$

Таким образом, для оценки возможного улова необходимо найти закономерность изменения численности рыб и их средней массы с возрастом. Если для выражения изменения численности рыб Ф.И.Баранова (191) в настоящее время альтернативы не существует, то изменение массы рыб с возрастом может быть описано разными уравнениями. Во всяком случае не найдено универсального аналитического выражения функции

(t) и можно привести ряд примеров различного подхода к описанию этой зависимости. Так, Ф.И.Баранов для североморской камбалы использовал линейную зависимость длины рыбы от возраста ($t = \tau l$) и кубическую между массой и длиной ($w = b l^3$). У.Рикер (1979) ввел экспоненциальную функцию роста: $w = w_0 e^{gt}$, могут быть использованы и другие зависимости роста (Мина и Клевезаль, 1976; Рикер, 1983 и др.). В любом случае будет меняться лишь результирующая формула для оценки возможного улова, но принцип построения модели остается постоянным.

Используя уравнение Берталанффи (см.раздел I), наиболее подходящее для описания изменения массы и длины рыб от возраста, и уравнение (191), Р.Бивертон и С.Холт построили математическую модель для оценки возможного улова в зависимости от интенсивности промысла. Эта модель - одна из наиболее разработанных и удачных модификаций модели Ф.И.Баранова.

Подобный вывод уравнения возможного улова Бивертона- Холта приведен в работах Р.Бивертона и С.Холта (1969), А.В.Засосова (1970, 1976), У.Рикера (1979). В окончательном виде уравнение возможного улова, который может быть взят из запаса имеет следующий вид:

$$Y = F \cdot R \cdot W_\infty \cdot e^{-M\tau} \sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\Omega_n e^{-nK(t_c - t_0)}}{F+M+nK} \left[1 - e^{-(F+M+nK)\lambda}\right]. \qquad (192)$$

Это уравнение было выведено из предположения о существовании кубической зависимости между массой и длиной рыбы: $w = b l^3$. Однако для многих промысловых видов рыб чаще наблюдается зависимость вида: $w = b l^n$, где n принимает значения, отличные от 3. Общий случай уравнения Бивертона-Холта рассмотрен К.Катти (Kutty , 1968), который привел его к виду:

$$Y = F \cdot R \cdot W_\infty \cdot e^{-M\tau} \sum_{n=0}^{d-1} (-1)^n \frac{\Omega_n e^{-nK(t_c - t_0)}}{F+M+nK} \left[1 - e^{-(F+M+nK)\lambda}\right]$$

На практике величину пополнения R определить трудно, поэтому ее выносят в левую часть уравнения и при расчетах пользуются относительными показателями (Y/R, P/R и т.д.). Форма кривых от этого не меняется, но такой перенос оправдан только в том случае, если пополнение относительно постоянно и не зависит от других параметров промыслового запаса. В относительных показателях уравнение возможного улова тогда принимает вид:

$$\frac{Y}{R} = F \cdot W_\infty e^{-M\tau} \sum_{n=0}^{d-1} (-1)^n \frac{\Omega_n e^{-nK(t_c - t_0)}}{F+M+nK} \left[1 - e^{-(F+M+nK)\lambda}\right] \qquad (193)$$

При расчетах по этой модели фактически строится зависимость величины возможного улова Y/R от величины коэффициента промысловой смертности F, пропорциональной интенсивности промысла. Осталь - ные параметры модели предполагаются постоянными.

Методика расчета по уравнению (192) может быть разной. Простой табличный способ расчета величины возможного улова приводится в книге Р.Бивертона и С.Холта. Детальные способы расчетов с использованием таблиц и настольных калькуляторов рассматриваются в методических рекомендациях, изданных в АтлантНИРО (Гасюков и др., 1980). Расчеты по уравнению (193) более трудоемки и для их реализации необходима ЭВМ. Для обоих вариантов модели Бивертона- Холта существуют специальные программы для ЭВМ.

При использовании аналитических моделей для анализа состояния запаса и промысла рыб важны не просто расчеты, но и правильное понимание и интерпретация полученных результатов. Прежде всего следует учитывать, что эти модели могут применяться не для всех видов рыб. Практика показывает, что более точные результаты оценки и рекомендации по управлению запасом и промыслом могут быть получены для рыб с относительно длительным жизненным циклом и небольшими колебаниями пополнения. В настоящее время аналитические мо - дели поэтому используют не для нахождения абсолютных единиц уло - ва, а для определения величины промысловой смертности F_{max}, со ответствующей максимальной величине улова и выявления общей тен денции возможного улова и численности запаса при разных режимах промысла.

Аналитические модели строят в соответствии с концепцией MSY (максимально устойчивого улова), означающей максимизацию физического улова на длительной основе. Неправильное толкование концеп - ции MSY и произвольная трактовка полученных результатов могут привести к ложным рекомендациям промышленности.

Следует иметь в виду, что определение "максимальный устойчивый улов" имеет два значения и относятся к величинам, отличающимся друг от друга. В зависимости от типа используемой математи - ческой модели, можно получить максимальный устойчивый улов на единицу пополнения MSY/R, обычно определяемый на основе расчетов по модели Бивертона-Холта и абсолютный максимальный устойчивый улов MSY, определяемый по продукционным моделям или по моделям типа "запас-пополнение". В первом случае это - удельный максимальный устойчивый улов на единицу пополнения для заданного возраста вступления в промысел. Этому улову соответствует величина промысловой смертности F_{max} . Во втором случае получаем оценку величины истинного максимального устойчивого улова, которому соответствует величина промысловой смертности F_{max}.

Следует учитывать, что для многих запасов характерны большие межгодовые колебания пополнения. Если по естественным причинам пополнение остается на низком уровне несколько лет подряд, то промысел на уровне F_{max} при стабильном пополнении приведет к истощению запаса. Предположение о том, что коэффициент промысловой смертности, который дает наибольший улов в расчете на единицу пополнения, даст также максимальный возможный улов в абсолютных единицах, ошибочно, следовательно, и подобные оценки требуют критического отношения.

В то же время, при достаточно точной информации об изменении величины пополнения (например, при использовании для этого результатов расчетов методом VPA или результатов съемок молоди), можно не только рассчитать величину устойчивого улова в абсолютных единицах для среднего уровня пополнения, но и корректировать кривые улова, учитывая ежегодные изменения в пополнении.

Определить величину F_{max} по кривой возможного улова не всегда возможно, поскольку форма кривых существенно меняется в зависимости от коэффициента естественной смертности M и коэффициента скорости роста K рассматриваемого вида рыбы (Ефимов, 1980). Форма кривой улова определяется отношением M/K. Если величина M/K велика, кривая асимптотична и не имеет максимума. Такие кривые характерны для короткоцикловых видов рыб. Долгоживущие виды обычно имеют малое значение M/K. В этом случае кривая улова имеет четкий максимум и определить величину F_{max} несложно. Для промежуточных значений M/K кривая улова имеет плоскую вершину, а величина F_{max} лежит в широком диапазоне значений.

Перечисленные сложности определения величины F_{max} по кривой улова, а также отсутствие гарантии сохранения запаса на высокопродуктивном уровне при ведении промысла на уровне MSY , привели к необходимости введения нового критерия, который позволял бы всегда найти необходимую величину промысловой смертности и в то же время устанавливал бы величину рекомендуемого улова на уровне, ограждающем в какой-то мере запас от возможного перелова.

Таким критерием, позволяющем искуственно занизить полученные на основе концепции MSY оценки и приводящий в результате к щадящему режиму рыболовства, является критерий $F_{0,1}$. Согласно правилу рекомендуемый промысловый режим должен соответствовать точке кривой устойчивого улова, в которой маргинальный улов, т.е. ста -

бильный прирост улова за счет дополнительной единицы усилия, составляет 10% величины маргинального улова при крайне слабой эксплуатации данного запаса (Ефимов, 1980, Бабаян, 1982). Положение точки b кривой улова в соответствии с этим правилом определяется графически как точка касания прямой с угловым коэффициентом, равным 0,1 коэффициента наклона касательной к кривой улова в начале координат. В результате в качестве рекомендованных величин промысловой смертности и возможного улова принимаются такие значения, которые заведомо меньше оценок, соответствующих максимальному устойчивому улову.

Оценка величины коэффицента промысловой смертности на уровне $F_{0,1}$ может быть получена графически, однако этот способ дает большую погрешность. Более надежными и точными следует признать аналитические способы оценки.

Как уже указывалось выше, возможно усложнение аналитических моделей путем уточнения действительных изменений тех параметров, которые в традиционных моделях принимаются постоянными. Например, использование в математических моделях фиксированного значения коэффициента естественной смертности M - одно из слабых мест и служит поводом для критики со стороны многих биологов. Выявление зависимости $M(t)$ может привести существующие модели к форме, более реально описывающей происходящие в популяции изменения и получить более близкие к действительности результаты оценки вылова.

Усовершенствование моделей может состоять в использовании аналитического выражения $M(t)$ вместо $M = const$, трудность которого заключается прежде всего в том, что формула для описания всей кривой смертности будет сложной и при введении ее в математическую модель интегрирование уравнения улова будет очень трудоемким. В то же время правая часть кривой, как правило, относится к промысловому запасу, поэтому для практических целей можно ограничиться рассмотрением лишь этой части кривой распределения естественной смертности с возрастом.

Уравнение изменения численности при использовании функции $M(t)$ будет иметь вид:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\left[F + M(t)\right] \cdot N(t). \qquad (194)$$

Отличие от обычной формы уравнения изменения численности (190) заключается в использовании переменного значения $M(t)$, что приведет к иному решению выражения (194) для функции $N(t)$ и соответственно к иной форме результирующего уравнения возможного улова.

Пример. Рассмотрим построение кривых возможного улова и определения режима эксплуатации орегонской мерлузы.

В первом случае использовали традиционную модель Бивертона-Холта в виде (193) при М = const. Кривая возможного улова на единицу пополнения строилась на основе следующих данных (Ефимов, 1980):

t_r, лет 3	t_0, лет .... –0,26	W_∞, г 2508
t_c, лет 6	$r = t_c - t_r$, лет .. 3	К 0,147
t_λ, лет 15	$\lambda = t_\lambda - t_c$, лет . 9	М 0,45

Расчеты проводились на ЭВМ. Переход от относительных единиц улова к абсолютному значению проводился в соответствии с рассчитанной средней величиной пополнения: $\bar{R}$ = 1844,26·10^{6}шт. по формуле:

$$Y = Y/R \cdot \bar{R} \qquad (195)$$

Результирующая кривая I возможного улова представлена на рис. 8.

Для орегонской мерлузы расчетные параметры формулы (40), при-

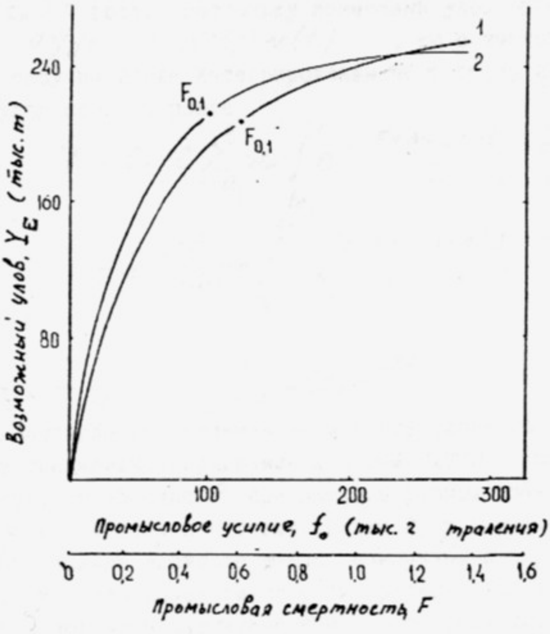


Рис. 8. Кривые возможного улова орегонской мерлузы:
1 – Бивертона-Холта; 2 – модифицированная кривая возможного улова

веденной ранее, будет следующими: A = 0,I2; B = I,32·I0^{-5} ; x = = 4,49.

В соответствии с уравнением (40) уравнение (I94) будет решаться относительно $N(t)$ (Булгакова и Ефимов, I982) таким образом:

$$N(t) = C_1 \cdot e^{-(F+A)t - \frac{B}{x+1} t^{x+1}},$$

где:

$$C_1 = R\, e^{(F+A)t_c + \frac{B}{x+1} t_c^{x+1}}.$$

Некоторые изменения были внесены и в уравнение весового роста:

$$w(t) = (C + D e^{-\text{æ} t})\left[1 - e^{-K(t-t_0)}\right]^3 L_\infty^3, \tag{I96}$$

здесь C, Д, x – параметры функции безразмерного возраста:

$\mu(\tau) = C + D e^{-\tau}$,

где τ – отношение текущего возраста к возрасту полового созревания рыбы: $\tau = t/t_n$.

Для орегонской мерлузы: $C = 5 \cdot 10^{-3}$; $D = 4 \cdot 10^{-3}$; $\text{æ} = 1/t_n = 0{,}25$; $t_n = 4$ года. Поскольку возможный улов определяется уравнением: $dY/dt = F \cdot N(t) \cdot w(t)$, то с учетом уравнений (I96) и (40), получим после интегрирования по t от t_c до t_λ, что возможный улов мерлузы равен

$$Y = C_2 \cdot C \sum_{n=0}^{3} W_n \int_{t_c}^{t_\lambda} e^{-(F+A+nK)t - \frac{B}{x+1} t^{x+1}} dt + C_2 D \sum_{n=0}^{3} W_n \int_{t_c}^{t_\lambda} e^{-(F+A+\text{æ}+nK)t - \frac{B}{x+1} t^{x+1}} dt, \tag{I97}$$

где: $C_2 = F \cdot C_1 L_\infty^3$; $W_n = \Omega_n e^{nKt_0}$.

Для вычисления величины возможного улова по уравнению (I97) написана специальная программа для ЭВМ "МЕТОD". Как и в предыдущем случае, пополнение R принималось равным I844,26·I0^6 шт. По результатам расчетов построена кривая 2 на рис.8. Как видно из рисунка, обе кривые улова не имеют максимума и определить величину оптимальной промысловой смертности трудно. Для вычисления этой величины используем аналитический способ расчета, предложенный для оценки оптимальной интенсивности промысла – критерий $F_{0.1}$ (Гасюков и др., I982).

Оптимальная интенсивность промысла в этом случае определяется такой величиной промысловой смертности, при которой производная функции улова на пополнение составляет 0,I производной в начале координат:

$$\left.\frac{d(Y/R)}{dF}\right|_{F_{0.1}} = 0.1 \left.\frac{d(Y/R)}{dF}\right|_{F=0}.$$

Переходя к конечным разностям и просматривая их последовательность, определяем величину $\mathcal{F}_{0,1}$, которая будет соответствовать моменту, когда разность приращения в i-ой точке кривой улова и 0,I доли в начале кривой улова сменит знак (с плюса на минус).

Для кривой Бивертона-Холта оптимальная промысловая смертность $\mathcal{F}_{0,1}$ оказалась равной 0,6, а для модифицированной кривой улова 0,5 (см.рис.8)

Для пересчета мгновенных единиц промысловой смертности в фактические единицы промыслового усилия используем формулу:

$F = q f$, где $q = 4{,}84 \cdot 10^{-6}$ (Ефимов, I980).

Оптимальные параметры промысла орегонской мерлузы

Кривые	Y ,тыс.т	$F_{0,I}$	f_{opt},тыс. ч траления
Бивертона-Холта	206,6	0,6	I24
Модифицированная возможного улова	2I7,6	0,5	I03

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИИ $r = r(\mathcal{F}, M)$

$$0{,}10 \leq M \leq 0{,}50$$

$$0{,}10 \leq \mathcal{F} \leq 1{,}50$$

Обозначения:

$$S = e^{-(\mathcal{F}+M)};$$

$$E^{*} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}+M}\left(1 - e^{-(\mathcal{F}+M)}\right);$$

$$r = \frac{(\mathcal{F}+M)\,e^{-(\mathcal{F}+M)}}{\mathcal{F}\left(1 - e^{-(\mathcal{F}+M)}\right)}.$$

F	Z	S	E*	r
		M = 0,I0		
0,0I00	0,II00	0,8958	0,0093	94,6008
0,0200	0,I200	0,8869	0,0I88	47,0600
0,0300	0,I300	0,878I	0,028I	3I,2I36
0,0400	0,I400	0,8694	0,0373	23,2908
0,0500	0,I500	0,8607	0,0464	I8,5375
0,0600	0,I600	0,852I	0,0554	I5,3689
0,0700	0,I700	0,8437	0,0644	I3,I058
0,0800	0,I800	0,8353	0,0732	II,4087
0,0900	0,I900	0,8270	0,0820	I0,0890
0,I000	0,2000	0,8I87	0,0906	9,0333
0,II00	0,2I00	0,8I06	0,0992	8,I697
0,I200	0,2200	0,8025	0,I077	7,4503
0,I300	0,2300	0,7945	0,II6I	0,84I6
0,I400	0,2400	0,7866	0,I245	6,3200
0,I500	0,2500	0,7788	0,I327	5,8680
0,I600	0,2600	0,77II	0,I409	5,4727
0,I700	0,2700	0,7634	0,I490	5,I239
0,I800	0,2800	0,7558	0,I570	4,8I40
0,I900	0,2900	0,7483	0,I649	4,5368
0,2000	0,3000	0,7408	0,I728	4,2874
0,2I00	0,3I00	0,7334	0,I806	4,06I9
0,2200	0,3200	0,726I	0,I883	3,8569
0,2300	0,3300	0,7I89	0,I959	3,6698
0,2400	0,3400	0,7II8	0,2035	3,4984
0,2500	0,3500	0,7047	0,2I09	3,3408
0,2600	0,3600	0,6977	0,2I83	3,I953
0,2700	0,3700	0,6907	0,2257	3,0607
0,2800	0,3800	0,6839	0,2329	2,9357
0,2900	0,3900	0,677I	0,240I	2,8I95
0,3000	0,4000	0,6703	0,2473	2,7II0
0,3I00	0,4I00	0,6637	0,2543	2,6096
0,3200	0,4200	0,6570	0,26I3	2,5I46
0,3300	0,4300	0,6505	0,2682	2,4253
0,3400	0,4400	0,6440	0,275I	2,34I4
0,3500	0,4500	0,6376	0,28I8	2,2623

F	Z	S	E^N	r
		M = 0,I0		
0,3600	0,4600	0,63I3	0,2886	2,I877
0,3700	0,4700	0,6250	0,2952	2,II7I
0,3800	0,4800	0,6I88	0,30I8	2,0503
0,3900	0,4900	0,6I26	0,3083	I,9870
0,4000	0,5000	0,6065	0,3I48	I,9269
0,4I00	0,5I00	0,6005	0,32I2	I,8697
0,4200	0,5200	0,5945	0,3275	I,8I53
0,4300	0,5300	0,5886	0,3338	I,7635
0,4400	0,5400	0,5827	0,3400	I,7I4I
0,4500	0,5500	0,5769	0,346I	I,6668
0,4600	0,5600	0,57I2	0,3522	I,62I7
0,4700	0,5700	0,5655	0,3583	I,5786
0,4800	0,5800	0,5599	0,3642	I,5372
0,4900	0,5900	0,5543	0,370I	I,4976
0,5000	0,6000	0,5488	0,3760	I,4596
0,5I00	0,6I00	0,5434	0,38I8	I,4232
0,5200	0,6200	0,5379	0,3875	I,388I
0,5300	0,6300	0,5326	0,3932	I,3544
0,5400	0,6400	0,5273	0,3988	I,3220
0,5500	0,6500	0,5220	0,4044	I,2908
0,5600	0,6600	0,5I69	0,4099	I,2608
0,5700	0,6700	0,5II7	0,4I54	I,23I8
0,5800	0,6800	0,5066	0,4208	I,2039
0,5900	0,6900	0,50I6	0,4262	I,I769
0,6000	0,7000	0,4966	0,43I5	I,I508
0,6I00	0,7I00	0,49I6	0,4368	I,I257
0,6200	0,7200	0,4868	0,4420	I,I0I3
0,6300	0,7300	0,48I9	0,447I	I,0778
0,6400	0,7400	0,477I	0,4522	I,0550
0,6500	0,7500	0,4724	0,4573	I,0330
0,6600	0,7600	0,4677	0,4623	I,0II6
0,6700	0,7700	0,4630	0,4672	0,9909
0,6800	0,7800	0,4584	0,4722	0,9709
0,6900	0,7900	0,4538	0,4770	0,95I4
0,7000	0,8000	0,4493	0,48I8	0,9325

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,I0		
0,7I00	0,8I00	0,4449	0,4866	0,9I42
0,7200	0,8200	0,4404	0,49I3	0,8964
0,7300	0,8300	0,4360	0,4960	0,879I
0,7400	0,8400	0,43I7	0,5006	0,8623
0,7500	0,8500	0,4274	0,5052	0,8460
0,7600	0,8600	0,4232	0,5098	0,830I
0,7700	0,8700	0,4I90	0,5I43	0,8I47
0,7800	0,8800	0,4I48	0,5I87	0,7996
0,7900	0,8900	0,4I07	0,523I	0,7850
0,8000	0,9000	0,4066	0,5275	0,7708
0,8I00	0,9I00	0,4025	0,53I8	0,7569
0,8200	0,9200	0,3985	0,536I	0,7434
0,8300	0,9300	0,3946	0,5403	0,7302
0,8400	0,9400	0,3906	0,5445	0,7I73
0,8500	0,9500	0,3867	0,5487	0,7048
0,8600	0,9600	0,3829	0,5528	0,6926
0,8700	0,9700	0,379I	0,5569	0,6807
0,8800	0,9800	0,3753	0,5609	0,669I
0,8900	0,9900	0,37I6	0,5649	0,6577
0,9000	I,0000	0,3679	0,5689	0,6466
0,9I00	I,0I00	0,3642	0,5728	0,6358
0,9200	I,0200	0,3606	0,5767	0,6253
0,9300	I,0300	0,3570	0,5806	0,6I49
0,9400	I,0400	0,3535	0,5844	0,6048
0,9500	I,0500	0,3499	0,5882	0,5950
0,9600	I,0600	0,3465	0,59I9	0,5853
0,9700	I,0700	0,3430	0,5956	0,5759
0,9800	I,0800	0,3396	0,5993	0,5667
0,9900	I,0900	0,3362	0,6029	0,5577
I,0000	I,I000	0,3329	0,6065	0,5489
I,0I00	I,II00	0,3296	0,6I00	0,5402
I,0200	I,I200	0,3263	0,6I36	0,53I8
I,0300	I,I300	0,3230	0,6I7I	0,5235
I,0400	I,I400	0,3I98	0,6205	0,5I54
I,0500	I,I500	0,3I66	0,6239	0,5075

F	Z	S	E*	r
		M = 0,I0		
I,0600	I,I600	0,3I35	0,6273	0,4997
I,0700	I,I700	0,3I04	0,6307	0,492I
I,0800	I,I800	0,3073	0,6340	0,4847
I,0900	I,I900	0,3042	0,6373	0,4774
I,I000	I,2000	0,30I2	0,6406	0,4702
I,II00	I,2I00	0,2982	0,6438	0,4632
I,I200	I,2200	0,2952	0,6470	0,4563
I,I300	I,2300	0,2923	0,6502	0,4496
I,I400	I,2400	0,2894	0,6533	0,4430
I,I500	I,2500	0,2865	0,6564	0,4365
I,I600	I,2600	0,2837	0,6595	0,430I
I,I700	I,2700	0,2808	0,6625	0,4239
I,I800	I,2800	0,2780	0,6656	0,4I77
I,I900	I,2900	0,2753	0,6685	0,4II7
I,2000	I,3000	0,2725	0,67I5	0,4058
I,2I00	I,3I00	0,2698	0,6744	0,400I
I,2200	I,3200	0,267I	0,6773	0,3944
I,2300	I,3300	0,2645	0,6802	0,3888
I,2400	I,3400	0,26I8	0,683I	0,3833
I,2500	I,3500	0,2592	0,6859	0,3780
I,2600	I,3600	0,2567	0,6887	0,3727
I,2700	I,3700	0,254I	0,69I4	0,3675
I,2800	I,3800	0,25I6	0,6942	0,3624
I,2900	I,3900	0,249I	0,6969	0,3574
I,3000	I,4000	0,2466	0,6996	0,3525
I,3I00	I,4I00	0,244I	0,7022	0,3477
I,3200	I,4200	0,24I7	0,7049	0,3429
I,3300	I,4300	0,2393	0,7075	0,3382
I,3400	I,4400	0,2369	0,7I0I	0,3337
I,3500	I,4500	0,2346	0,7I26	0,3292
I,3600	I,4600	0,2322	0,7I52	0,3247
I,3700	I,4700	0,2299	0,7I77	0,3204
I,3800	I,4800	0,2276	0,7202	0,3I6I
I,3900	I,4900	0,2254	0,7226	0,3II9
I,4000	I,5000	0,223I	0,725I	0,3077

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,I0		
I,4I00	I,5I00	0,2209	0,7275	0,3037
I,4200	I,5200	0,2I87	0,7299	0,2997
I,4300	I,5300	0,2I65	0,7323	0,2957
I,4400	I,5400	0,2I44	0,7346	0,29I8
I,4500	I,5500	0,2I22	0,7369	0,2880
I,4600	I,5600	0,2I0I	0,7392	0,2843
I,4700	I,5700	0,2080	0,74I5	0,2806
I,4800	I,5800	0,2060	0,7438	0,2769
I,4900	I,5900	0,2039	0,7460	0,2734
I,5000	I,6000	0,20I9	0,7482	0,2698
		M = 0,I5		
0,0I00	0,I600	0,852I	0,0092	92,2I32
0,0200	0,I700	0,8437	0,0I84	45,8704
0,0300	0,I800	0,8353	0,0275	30,4233
0,0400	0,I900	0,8270	0,0364	22,7002
0,0500	0,2000	0,8I87	0,0453	I8,0666
0,0600	0,2I00	0,8I06	0,054I	I4,9779
0,0700	0,2200	0,8025	0,0628	I2,77I9
0,0800	0,2300	0,7945	0,07I5	II,II76
0,0900	0,2400	0,7866	0,0800	9,83II
0,I000	0,2500	0,7788	0,0885	8,8020
0,II00	0,2600	0,77II	0,0969	7,9602
0,I200	0,2700	0,7634	0,I052	7,2589
0,I300	0,2800	0,7558	0,II34	6,6656
0,I400	0,2900	0,7483	0,I2I5	6,I57I
0,I500	0,3000	0,7408	0,I296	5,7I66
0,I600	0,3I00	0,7334	0,I376	5,33I2
0,I700	0,3200	0,726I	0,I455	4,99I3
0,I800	0,3300	0,7I39	0,I533	4,6892
0,I900	0,3400	0,7II8	0,I6II	4,4I90
0,2000	0,3500	0,7047	0,I687	4,I759
0,2I00	0,3600	0,6977	0,I764	3,956I
0,2200	0,3700	0,6907	0,I839	3,7563
0,2300	0,3800	0,6839	0,I9I3	3,5739

F	τ	S	E^*	r
		M = 0,I5		
0,2400	0,3900	0,677I	0,I987	3,4068
0,2500	0,4000	0,6703	0,2060	3,2532
0,2600	0,4I00	0,6637	0,2I33	3,III4
0,2700	0,4200	0,6570	0,2205	2,9802
0,2800	0,4300	0,6505	0,2276	2,8584
0,2900	0,4400	0,6440	0,2346	2,745I
0,3000	0,4500	0,6376	0,24I6	2,6394
0,3I00	0,4600	0,63I3	0,2485	2,5406
0,3200	0,4700	0,6250	0,2553	2,4479
0,3300	0,4800	0,6I88	0,262I	2,36I0
0,3400	0,4900	0,6I26	0,2688	2,2792
0,3500	0,5000	0,6065	0,2754	2,202I
0,3600	0,5I00	0,6005	0,2820	2,I294
0,3700	0,5200	0,5945	0,2885	2,0606
0,3800	0,5300	0,5886	0,2950	I,9955
0,3900	0,5400	0,5827	0,30I3	I,9338
0,4000	0,5500	0,5769	0,3077	I,8752
0,4I00	0,5600	0,57I2	0,3I39	I,8I95
0,4200	0,5700	0,5655	0,320I	I,7665
0,4300	0,5800	0,5599	0,3263	I,7I60
0,4400	0,5900	0,5543	0,3324	I,6678
0,4500	0,6000	0,5488	0,3384	I,62I8
0,4600	0,6I00	0,5434	0,3444	I,5779
0,4700	0,6200	0,5379	0,3503	I,5358
0,4800	0,6300	0,5326	0,356I	I,4955
0,4900	0,6400	0,5273	0,36I9	I,4569
0,5000	0,6500	0,5220	0,3677	I,4I99
0,5I00	0,6600	0,5I69	0,3733	I,3844
0,5200	0,6700	0,5II7	0,3790	I,3503
0,5300	0,6800	0,5066	0,3845	I,3I74
0,5400	0,6900	0,50I6	0,390I	I,2859
0,5500	0,7000	0,4966	0,3955	I,2555
0,5600	0,7I00	0,49I6	0,40I0	I,2262
0,5700	0,7200	0,4868	0,4063	I,I979
0,5800	0,7300	0,48I9	0,4II6	I,I707

F	Z	S	E*	r
		M = 0,I5		
0,5900	0,7400	0,477I	0,4I69	I,I444
0,6000	0,7500	0,4724	0,422I	I,II9I
0,6I00	0,7600	0,4677	0,4273	I,0946
0,6200	0,7700	0,4630	0,4324	I,0708
0,6300	0,7800	0,4584	0,4374	I,0479
0,6400	0,7900	0,4538	0,4425	I,0257
0,6500	0,8000	0,4493	0,4474	I,0043
0,6600	0,8I00	0,4449	0,4523	0,9835
0,6700	0,8200	0,4404	0,4572	0,9633
0,6800	0,8300	0,4360	0,4620	0,9438
0,6900	0,8400	0,43I7	0,4668	0,9248
0,7000	0,8500	0,4274	0,47I5	0,9064
0,7I00	0,8600	0,4232	0,4762	0,8886
0,7200	0,8700	0,4I90	0,4809	0,87I2
0,7300	0,8800	0,4I48	0,4855	0,8544
0,7400	0,8900	0,4I07	0,4900	0,8380
0,7500	0,9000	0,4066	0,4945	0,822I
0,7600	0,9I00	0,4025	0,4990	0,8067
0,7700	0,9200	0,3985	0,5034	0,79I6
0,7800	0,9300	0,3946	0,5078	0,7770
0,7900	0,9400	0,3906	0,5I2I	0,7627
0,8000	0,9500	0,3867	0,5I64	0,7489
0,8I00	0,9600	0,3829	0,5207	0,7354
0,8200	0,9700	0,379I	0,5249	0,7222
0,8300	0,9800	0,3753	0,529I	0,7094
0,8400	0,9900	0,37I6	0,5332	0,6969
0,8500	I,0000	0,3679	0,5373	0,6847
0,8600	I,0I00	0,3642	0,54I4	0,6728
0,8700	I,0200	0,3606	0,5454	0,66I2
0,8800	I,0300	0,3570	0,5494	0,6499
0,8900	I,0400	0,3535	0,5533	0,6383
0,9000	I,0500	0,3499	0,5572	0,6280
0,9I00	I,0600	0,3465	0,56II	0,6I75
0,9200	I,0700	0,3430	0,5649	0,6072
0,9300	I,0800	0,3396	0,5687	0,5972

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,I5		
0,9400	I,0900	0,3362	0,5724	0,5873
0,9500	I,I000	0,3329	0,5762	0,5777
0,9600	I,II00	0,3296	0,5798	0,5684
0,9700	I,I200	0,3263	0,5835	0,5592
0,9800	I,I300	0,3230	0,587I	0,5502
0,9900	I,I400	0,3I98	0,5907	0,54I4
I,0000	I,I500	0,3I66	0,5942	0,5329
I,0I00	I,I600	0,3I35	0,5977	0,5245
I,0200	I,I700	0,3I04	0,60I2	0,5I62
I,0300	I,I800	0,3073	0,6047	0,5082
I,0400	I,I900	0,3042	0,608I	0,5003
I,0500	I,2000	0,30I2	0,6II5	0,4926
I,0600	I,2I00	0,2982	0,6I48	0,4850
I,0700	I,2200	0,2952	0,6I8I	0,4776
I,0800	I,2300	0,2923	0,62I4	0,4704
I,0900	I,2400	0,2894	0,6247	0,4633
I,I000	I,2500	0,2865	0,6279	0,4563
I,II00	I,2600	0,2837	0,63II	0,4495
I,I200	I,2700	0,2808	0,6342	0,4428
I,I300	I,2800	0,2780	0,6374	0,4362
I,I400	I,2900	0,2753	0,6405	0,4298
I,I500	I,3000	0,2725	0,6435	0,4235
I,I600	I,3I00	0,2698	0,6466	0,4I73
I,I700	I,3200	0,267I	0,6496	0,4II2
I,I800	I,3300	0,2645	0,6526	0,4053
I,I900	I,3400	0,26I8	0,6555	0,3994
I,2000	I,3500	0,2592	0,6585	0,3937
I,2I00	I,3600	0,2567	0,66I4	0,388I
I,2200	I,3700	0,254I	0,6642	0,3826
I,2300	I,3800	0,25I6	0,667I	0,377I
I,2400	I,3900	0,249I	0,6699	0,37I8
I,2500	I,4000	0,2466	0,6727	0,3666
I,2600	I,4I00	0,244I	0,6754	0,36I5
I,2700	I,4200	0,24I7	0,6782	0,3564
I,2800	I,4300	0,2393	0,6809	0,35I5

F	Z	S	E*	r
		M = 0,I5		
I,2900	I,4400	0,2369	0,6836	0,3466
I,3000	I,4500	0,2346	0,6862	0,34I8
I,3I00	I,4600	0,2322	0,6889	0,337I
I,3200	I,4700	0,2299	0,69I5	0,3325
I,3300	I,4800	0,2276	0,694I	0,3280
I,3400	I,4900	0,2254	0,6966	0,3235
I,3500	I,5000	0,223I	0,6992	0,3I9I
I,3600	I,5I00	0,2209	0,70I7	0,3I48
I,3700	I,5200	0,2I87	0,7042	0,3I06
I,3800	I,5300	0,2I65	0,7067	0,3064
I,3900	I,5400	0,2I44	0,709I	0,3023
I,4000	I,5500	0,2I22	0,7II5	0,2983
I,4I00	I,5600	0,2I0I	0,7I39	0,2943
I,4200	I,5700	0,2080	0,7I63	0,2904
I,4300	I,5800	0,2060	0,7I86	0,2866
I,4400	I,5900	0,2039	0,72I0	0,2828
I,4500	I,6000	0,20I9	0,7233	0,279I
I,4600	I,6I00	0,I999	0,7256	0,2755
I,4700	I,6200	0,I979	0,7278	0,27I9
I,4800	I,6300	0,I959	0,730I	0,2684
I,4900	I,6400	0,I940	0,7323	0,2649
I,5000	I,6500	0,I920	0,7345	0,26I5
		M = 0,20		
0,0I00	0,2I00	0,8I06	0,0090	89,8672
0,0200	0,2200	0,8025	0,0I80	44,70I5
0,0300	0,2300	0,7945	0,0268	29,6468
0,0400	0,2400	0,7866	0,0356	22,II99
0,0500	0,2500	0,7788	0,0442	I7,604I
0,0600	0,2600	0,77II	0,0528	I4,5938
0,0700	0,2700	0,7634	0,06I3	I2,4438
0,0800	0,2800	0,7558	0,0698	I0,83I6
0,0900	0,2900	0,7483	0,078I	9,5778
0,I000	0,3000	0,7408	0,0864	8,5749
0,II00	0,3I00	0,7334	0,0946	7,7545

F	Z	з	E^*	r
		M = 0,20		
0,I200	0,3200	0,726I	0,I027	7,07I0
0,I300	0,3300	0,7I89	0,II07	6,4928
0,I400	0,3400	0,7II8	0,II87	5,9972
0,I500	0,3500	0,7047	0,I266	5,5679
0,I600	0,3600	0,6977	0,I344	5,I924
0,I700	0,3700	0,6907	0,I42I	4,86II
0,I800	0,3800	0,6839	0,I497	4,5667
0,I900	0,3900	0,677I	0,I573	4,3034
0,2000	0,4000	0,6703	0,I648	4,0665
0,2I00	0,4I00	0,6637	0,I723	3,8522
0,2200	0,4200	0,6570	0,I796	3,6575
0,2300	0,4300	0,6505	0,I869	3,4798
0,2400	0,4400	0,6440	0,I942	3,3I70
0,2500	0,4500	0,6376	0,20I3	3,I673
0,2600	0,4600	0,63I3	0,2084	3,029I
0,2700	0,4700	0,6250	0,2I54	2,90I3
0,2800	0,4800	0,6I88	0,2224	2,7826
0.2900	0,4900	0,6I26	0,2293	2,6722
0,3000	0,5000	0,6065	0,236I	2,5692
0,3I00	0,5I00	0,6005	0,2428	2,4728
0,3200	0,5200	0,5945	0,2495	2,3826
0,3300	0,5300	0,5886	0,2562	2,2979
0,3400	0,5400	0,5827	0,2627	2,2I82
0,3500	0,5500	0,5769	0,2692	2,I43I
0,3600	0,5600	0,57I2	0,2757	2,0722
0,3700	0,5700	0,5655	0,2820	2,0052
0,3800	0,5800	0,5599	0,2883	I,94I8
0,3900	0,5900	0,5543	0,2946	I,88I6
0,4000	0,6000	0,5488	0,3008	I,8246
0,4I00	0,6I00	0,5434	0,3069	I,7703
0,4200	0,6200	0,5379	0,3I30	I,7I86
0,4300	0,6300	0,5326	0,3I90	I,6694
0,4400	0,6400	0,5273	0,3250	I,6225
0,4500	0,6500	0,5220	0,3309	I,5777
0.4600	0,6600	0,5I69	0,3367	I,5349

F	Z	S	E*	r
		M = 0,20		
0,4700	0,6700	0,5II7	0,3425	I,4939
0,4800	0,6800	0,5066	0,3483	I,4547
0,4900	0,6900	0,50I6	0,3540	I,4I7I
0,5000	0,7000	0,4966	0,3596	I,38I0
0,5I00	0,7I00	0,49I6	0,3652	I,3464
0,5200	0,7200	0,4868	0,3707	I,3I3I
0,5300	0,7300	0,48I9	0,376I	I,28I2
0,5400	0,7400	0,477I	0,38I6	I,2504
0,5500	0,7500	0,4724	0,3869	I,2208
0,5600	0,7600	0,4677	0,3922	I,I923
0,5700	0,7700	0,4630	0,3975	I,I648
0,5800	0,7800	0,4534	0,4027	I,I383
0,5900	0,7900	0,4538	0,4079	I,II27
0,6000	0,8000	0,4493	0,4I30	I,0880
0,6I00	0,8I00	0,4449	0,4I8I	I,064I
0,6200	0,8200	0,4404	0,423I	I,04I0
0,6300	0,8300	0,4360	0,428I	I,0I87
0,6400	0,8400	0,43I7	0,4330	0,997I
0,6500	0,8500	0,4274	0,4379	0,976I
0,6600	0,8600	0,4232	0,4427	0,9559
0,6700	0,8700	0,4I90	0,4475	0,9363
0,6800	0,8800	0,4I48	0,4522	0,9I72
0,6900	0,8900	0,4I07	0,4569	0,8988
0,7000	0,9000	0,4066	0,46I6	0,8809
0,7I00	0,9I00	0,4025	0,4662	0,8635
0,7200	0,9200	0,3985	0,4707	0,8466
0,7300	0,9300	0,3946	0,4752	0,8302
0,7400	0,9400	0,3906	0,4797	0,8I43
0,7500	0,9500	0,3867	0,4842	0,7988
0,7600	0,9600	0,3829	0,4885	0,7837
0,7700	0,9700	0,379I	0,4929	0,769I
0,7800	0,9800	0,3753	0,4972	0,7548
0,7900	0,9900	0,37I6	0,50I5	0,74I0
0,8000	I,0000	0,3679	0,5057	0,7275
0,8I00	I,0I00	0,3642	0,5099	0,7I43

F	Z	S	E*	r
		M = 0,20		
0,8200	I,0200	0,3606	0,5I40	0,70I5
0,8300	I,0300	0,3570	0,5I8I	0,6890
0,8400	I,0400	0,3535	0,5222	0,6768
0,8500	I,0500	0,3499	0,5262	0,6650
0,8600	I,0600	0,3465	0,5302	0,6534
0,8700	I,0700	0,3430	0,5342	0,642I
0,8800	I,0800	0,3396	0,538I	0,63II
0,8900	I,0900	0,3362	0,5420	0,6203
0,9000	I,I000	0,3329	0,5458	0,6098
0,9I00	I,II00	0,3296	0,5496	0,5996
0,9200	I,I200	0,3263	0,5534	0,5896
0,9300	I,I300	0,3230	0,557I	0,5798
0,9400	I,I400	0,3I98	0,5609	0,5702
0,9500	I,I500	0,3I66	0,5645	0,5609
0,9600	I,I600	0,3I35	0,568I	0,55I8
0,9700	I,I700	0,3I04	0,57I7	0,5428
0,9800	I,I800	0,3073	0,5753	0,534I
0,9900	I,I900	0,3042	0,5788	0,5256
I,0000	I,2000	0,30I2	0,5823	0,5I72
I,0I00	I,2I00	0,2982	0,5858	0,5090
I,0200	I,2200	0,2952	0,5892	0,50I0
I,0300	I,2300	0,2923	0,5926	0,4932
I,0400	I,2400	0,2894	0,5960	0,4855
I,0500	I,2500	0,2865	0,5993	0,4780
I,0600	I,2600	0,2837	0,6026	0,4707
I,0700	I,2700	0,2808	0,6059	0,4635
I,0800	I,2800	0,2780	0,6092	0,4564
I,0900	I,2900	0,2753	0,6I24	0,4495
I,I000	I,3000	0,2725	0,6I56	0,4427
I,II00	I,3I00	0,2698	0,6I87	0,436I
I,I200	I,3200	0,267I	0,62I8	0,4296
I,I300	I,3300	0,2645	0,6249	0,4232
I,I400	I,3400	0,26I8	0,6280	0,4I70
I,I500	I,3500	0,2592	0,63I0	0,4I08
I,I600	I,3600	0,2567	0,6340	0,4048

F	Z	S	E*	r
		M = 0,20		
I,I700	I,3700	0,254I	0,6370	0,3989
I,I800	I,3800	0,25I6	0,6400	0,393I
I,I900	I,3900	0,249I	0,6429	0,3874
I,2000	I,4000	0,2466	0,6458	0,38I9
I,2I00	I,4I00	0,244I	0,6486	0,3764
I,2200	I,4200	0,24I7	0,65I5	0,37I0
I,2300	I,4300	0,2393	0,6543	0,3657
I,2400	I,4400	0,2369	0,657I	0,3606
I,2500	I,4500	0,2346	0,6599	0,3555
I,2600	I,4600	0,2322	0,6626	0,3505
I,2700	I,4700	0,2299	0,6653	0,3456
I,2800	I,4800	0,2276	0,6680	0,3408
I,2900	I,4900	0,2254	0,6707	0,336I
I,3000	I,5000	0,223I	0,6733	0,33I4
I,3I00	I,5I00	0,2209	0,6759	0,3268
I,3200	I,5200	0,2I87	0,6785	0,3224
I,3300	I,5300	0,2I65	0,68II	0,3I79
I,3400	I,5400	0,2I44	0,6836	0,3I36
I,3500	I,5500	0,2I22	0,686I	0,3094
I,3600	I,5600	0,2I0I	0,6886	0,3052
I,3700	I,5700	0,2080	0,69II	0,30I0
I,3800	I,5800	0,2060	0,6935	0,2970
I,3900	I,5900	0,2039	0,6959	0,2930
I,4000	I,6000	0,20I9	0,6983	0,289I
I,4I00	I,6I00	0,I999	0,7007	0,2853
I,4200	I,6200	0,I979	0,703I	0,28I5
I,4300	I,6300	0,I959	0,7054	0,2778
I,4400	I,6400	0,I940	0,7077	0,274I
I,4500	I,6500	0,I920	0,7I00	0,2705
I,4600	I,6600	0,I90I	0,7I23	0,2669
I,4700	I,6700	0,I882	0,7I45	0,2635
I,4800	I,6800	0,I864	0,7I68	0,2600
I,4900	I,6900	0,I845	0,7I90	0,2566
I,5000	I,7000	0,I827	0,72I2	0,2533

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,25		
0,0I00	0,2600	0,77II	0,0088	87,5627
0,0200	0,2700	0,7634	0,0I75	43,5534
0,0300	0,2800	0,7558	0,0262	28,8842
0,0400	0,2900	0,7483	0,0347	2I,5500
0,0500	0,3000	0,7408	0,0432	I7,I498
0,0600	0,3I00	0,7334	0,05I6	I4,2I66
0,0700	0,3200	0,726I	0,0599	I2,I2I7
0,0800	0,3300	0,7I89	0,068I	I0,5507
0,0900	0,3400	0,7II8	0,0763	9,329I
0,I000	0,3500	0,7047	0,0844	8,35I9
0,II00	0,3600	0,6977	0,0924	7,5525
0,I200	0,3700	0,6907	0,I003	6,8865
0,I300	0,3800	0,6839	0,I082	6,323I
0,I400	0,3900	0,677I	0,II59	5,8403
0,I500	0,4000	0,6703	0,I236	5,4220
0,I600	0,4I00	0,6637	0,I3I3	5,056I
0,I700	0,4200	0,6570	0,I388	4,7333
0,I800	0,4300	0,6505	0,I463	4,4465
0,I900	0,4400	0,6440	0,I537	4,I899
0,2000	0,4500	0,6376	0,I6II	3,959I
0,2I00	0,4600	0,63I3	0,I683	3,7503
0,2200	0,4700	0,6250	0,I755	3,5606
0,2300	0,4800	0,6I88	0,I827	3,3875
0,2400	0,4900	0,6I26	0,I897	3,2289
0,2500	0,5000	0,6065	0,I967	3,0830
0,2600	0,5I00	0,6005	0,2037	2,9484
0,2700	0,5200	0,5945	0,2I05	2,8238
0,2800	0,5300	0,5886	0,2I73	2,7082
0,2900	0,5400	0,5827	0,224I	2,6006
0,3000	0,5500	0,5769	0,2308	2,5003
0,3I00	0,5600	0,57I2	0,2374	2,4064
0,3200	0,5700	0,5655	0,2439	2,3I85
0,3300	0,5800	0,5599	0,2504	2,2360
0,3400	0,5900	0,5543	0,2568	2,I584
0,3500	0,6000	0,5488	0,2632	2,0852

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,25		
0,3600	0,6I00	0,5434	0,2695	2,0I62
0,3700	0,6200	0,5379	0,2757	I,9509
0,3800	0,6300	0,5326	0,28I9	I,889I
0,3900	0,6400	0,5273	0,288I	I,8305
0,4000	0,6500	0,5220	0,294I	I,7749
0,4I00	0,6600	0,5I69	0,300I	I,7220
0,4200	0,6700	0,5II7	0,306I	I,67I7
0,4300	0,6800	0,5066	0,3I20	I,6238
0,4400	0,6900	0,50I6	0,3I78	I,578I
0,4500	0,7000	0,4966	0,3236	I,5345
0,4600	0,7I00	0,49I6	0,3294	I,4927
0,4700	0,7200	0,4868	0,3350	I,4528
0,4800	0,7300	0,48I9	0,3407	I,4I46
0,4900	0,7400	0,477I	0,3462	I,3780
0,5000	0,7500	0,4724	0,35I8	I,3429
0,5I00	0,7600	0,4677	0,3572	I,3092
0,5200	0,7700	0,4630	0,3626	I,2768
0,5300	0,7800	0,4584	0,3680	I,2456
0,5400	0,7900	0,4538	0,3733	I,2I57
0,5500	0,8000	0,4493	0,3786	I,I869
0,5600	0,8I00	0,4449	0,3838	I,I59I
0,5700	0,8200	0,4404	0,3890	I,I323
0,5800	0,8300	0,4360	0,394I	I,I065
0,5900	0,8400	0,43I7	0,3992	I,08I6
0,6000	0,8500	0,4274	0,4042	I,0575
0,6I00	0,8600	0,4232	0,4092	I,0342
0,6200	0,8700	0,4I90	0,4I4I	I,0II8
0,6300	0,8800	0,4I48	0,4I90	0,9900
0,6400	0,8900	0,4I07	0,4238	0,9690
0,6500	0,9000	0,4066	0,4286	0,9486
0,6600	0,9I00	0,4025	0,4333	0,9289
0,6700	0,9200	0,3985	0,4380	0,9098
0,6800	0,9300	0,3946	0,4427	0,89I3
0,6900	0,9400	0,3906	0,4473	0,8733
0,7000	0,9500	0,3867	0,45I9	0,8559

F	Z	S	E^{*}	r
		M = 0,25		
0,7I00	0,9600	0,3829	0,4564	0,8389
0,7200	0,9700	0,379I	0,4609	0,8225
0,7300	0,9800	0,3753	0,4653	0,8065
0,7400	0,9900	0,37I6	0,4697	0,79I0
0,7500	I,0000	0,3679	0,474I	0,7760
0,7600	I,0I00	0,3642	0,4784	0,76I3
0,7700	I,0200	0,3606	0,4827	0,747I
0,7800	I,0300	0,3570	0,4869	0,7332
0,7900	I,0400	0,3535	0,49II	0,7I97
0,8000	I,0500	0,3499	0,4953	0,7065
0,8I00	I,0600	0,3465	0,4994	0,6937
0,8200	I,0700	0,3430	0,5035	0,68I3
0,8300	I,0800	0,3396	0,5075	0,669I
0,8400	I,0900	0,3362	0,5II5	0,6573
0,8500	I,I000	0,3329	0,5I55	0,6457
0,8600	I,II00	0,3296	0,5I94	0,6344
0,8700	I,I200	0,3263	0,5233	0,6235
0,8800	I,I300	0,3230	0,5272	0,6I27
0,8900	I,I400	0,3I98	0,53I0	0,6023
0,9000	I,I500	0,3I66	0,5348	0,592I
0,9I00	I,I600	0,3I35	0,5386	0,582I
0,9200	I,I700	0,3I04	0,5423	0,5723
0,9300	I,I800	0,3073	0,5460	0,5628
0,9400	I,I900	0,3042	0,5496	0,5535
0,9500	I,2000	0,30I2	0,5532	0,5444
0,9600	I,2I00	0,2982	0,5568	0,5356
0,9700	I,2200	0,2952	0,5603	0,5269
0,9800	I,2300	0,2923	0,5639	0,5I84
0,9900	I,2400	0,2894	0,5673	0,5I0I
I,0000	I,2500	0,2865	0,5708	0,50I9
I,0I00	I,2600	0,2837	0,5742	0,4940
I,0200	I,2700	0,2808	0,5776	0,4862
I,0300	I,2800	0,2780	0,58I0	0,4786
I,0400	I,2900	0,2753	0,5843	0,47II
I,0500	I,3000	0,2725	0,5876	0,4638

F	Z	S	E^{x}	r
		M = 0,25		
I,0600	I,3I00	0,2698	0,5908	0,4567
I,0700	I,3200	0,267I	0,594I	0,4497
I,0800	I,3300	0,2645	0,5973	0,4428
I,0900	I,3400	0,26I8	0,6004	0,436I
I,I000	I,3500	0,2592	0,6036	0,4295
I,II00	I,3600	0,2567	0,6067	0,4230
I,I200	I,3700	0,254I	0,6098	0,4I67
I,I300	I,3800	0,25I6	0,6I28	0,4I05
I,I400	I,3900	0,249I	0,6I59	0,4044
I,I500	I,4000	0,2466	0,6I89	0,3985
I,I600	I,4I00	0,244I	0,62I8	0,3926
I,I700	I,4200	0,24I7	0,6248	0,3869
I,I800	I,4300	0,2393	0,6277	0,38I2
I,I900	I,4400	0,2369	0,6306	0,3757
I,2000	I,4500	0,2346	0,6335	0,3703
I,2I00	I,4600	0,2322	0,6363	0,3650
I,2200	I,4700	0,2299	0,639I	0,3598
I,2300	I,4800	0,2276	0,64I9	0,3546
I,2400	I,4900	0,2254	0,6447	0,3496
I,2500	I,5000	0,223I	0,6474	0,3447
I,2600	I,5I00	0,2209	0,650I	0,3398
I,2700	I,5200	0,2I87	0,6528	0,3350
I,2800	I,5300	0,2I65	0,6554	0,3304
I,2900	I,5400	0,2I44	0,658I	0,3258
I,3000	I,5500	0,2I22	0,6607	0,32I2
I,3I00	I,5600	0,2I0I	0,6633	0,3I68
I,3200	I,5700	0,2080	0,6658	0,3I25
I,3300	I,5800	0,2060	0,6684	0,3082
I,3400	I,5900	0,2039	0,6709	0,3040
I,3500	I,6000	0,20I9	0,6734	0,2998
I,3600	I,6I00	0,I999	0,6759	0,2957
I,3700	I,6200	0,I979	0,6783	0,29I7
I,3800	I,6300	0,I959	0,6807	0,2878
I,3900	I,6400	0,I940	0,6832	0,2839
I,4000	I,6500	0,I920	0,6855	0,280I

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,25		
I,4I00	I,6600	0,I90I	0,6879	0,2764
I,4200	I,6700	0,I882	0,6902	0,2727
I,4300	I,6800	0,I864	0,6926	0,269I
I,4400	I,6900	0,I845	0,6948	0,2656
I,4500	I,7000	0,I827	0,697I	0,262I
I,4600	I,7I00	0,I809	0,6994	0,2586
I,4700	I,7200	0,I79I	0,70I6	0,2552
I,4800	I,7300	0,I773	0,7038	0,25I9
I,4900	I,7400	0,I755	0,7060	0,2486
I,5000	I,7500	0,I738	0,7082	0,2454
		M = 0,30		
0,0I00	0,3I00	0,7334	0,0086	85,2996
0,0200	0,3200	0,726I	0,0I7I	42,4259
0,0300	0,3300	0,7I89	0,0256	28,I353
0,0400	0,3400	0,7II8	0,0339	20,9904
0,0500	0,3500	0,7047	0,0422	I6,7038
0,0600	0,3600	0,6977	0,0504	I3,8463
0,0700	0,3700	0,6907	0,0585	II,8055
0,0800	0,3800	0,6839	0,0666	I0,275I
0,0900	0,3900	0,677I	0,0745	9,0849
0,I000	0,4000	0,6703	0,0824	8,I330
0,II00	0,4I00	0,6637	0,0902	7,3543
0,I200	0,4200	0,6570	0,0980	6,7055
0,I300	0,4300	0,6505	0,I057	6,I566
0,I400	0,4400	0,6440	0,II33	5,6863
0,I500	0,4500	0,6376	0,I208	5,2788
0,I600	0,4600	0,63I3	0,I282	4,9223
0,I700	0,4700	0,6250	0,I356	4,6079
0,I800	0,4800	0,6I88	0,I430	4,3285
0,I900	0,4900	0,6I26	0,I502	4,0786
0,2000	0,5000	0,6065	0,I574	3,8537
0,2I00	0,5I00	0,6005	0,I645	3,6504
0,2200	0,5200	0,5945	0,I7I5	3,4656
0,2300	0,5300	0,5886	0,I785	3,2970

F	Z	S	E*	r
		M = 0,30		
0,2400	0,5400	0,5827	0,I854	3,I424
0,2500	0,5500	0,5769	0,I923	3,0003
0,2600	0,5600	0,57I2	0,I99I	2,8692
0,2700	0,5700	0,5655	0,2058	2,7479
0,2800	0,5800	0,5599	0,2I25	2,6353
0,2900	0,5900	0,5543	0,2I9I	2,5305
0,3000	0,6000	0,5488	0,2256	2,4327
0,3I00	0,6I00	0,5434	0,232I	2,34I3
0,3200	0,6200	0,5379	0,2385	2,2557
0,3300	0,6300	0,5326	0,2448	2,I753
0,3400	0,6400	0,5273	0,25II	2,0997
0,3500	0,6500	0,5220	0,2574	2,0285
0,3600	0,6600	0,5I69	0,2635	I,96I2
0,3700	0,6700	0,5II7	0,2697	I,8977
0,3800	0,6800	0,5066	0,2757	I,8375
0,3900	0,6900	0,50I6	0,28I7	I,7804
0,4000	0,7000	0,4966	0,2877	I,7263
0,4I00	0,7I00	0,49I6	0,2936	I,6748
0,4200	0,7200	0,4868	0,2994	I,6258
0,4300	0,7300	0,48I9	0,3052	I,579I
0,4400	0,7400	0,477I	0,3I09	I,5346
0,4500	0,7500	0,4724	0,3I66	I,492I
0,4600	0,7600	0,4677	0,3222	I,45I5
0,4700	0,7700	0,4630	0,3278	I,4I26
0,4800	0,7800	0,4584	0,3333	I,3754
0,4900	0,7900	0,4538	0,3388	I,3397
0,5000	0,8000	0,4493	0,3442	I,3055
0,5I00	0,8I00	0,4449	0,3495	I,2727
0,5200	0,8200	0,4404	0,3548	I,24I2
0,5300	0,8300	0,4360	0,360I	I,2I09
0,5400	0,8400	0,43I7	0,3653	I,I8I7
0,5500	0,8500	0,4274	0,3705	I,I536
0,5600	0,8600	0,4232	0,3756	I,I266
0,5700	0,8700	0,4I90	0,3807	I,I005
0,5800	0,8800	0,4I48	0,3857	I,0754

F	Z	S	E^{*}	r
		M = 0,30		
0,5900	0,8900	0,4I07	0,3907	I,05II
0,6000	0,9000	0,4066	0,3956	I,0277
0,6I00	0,9I00	0,4025	0,4005	I,0050
0,6200	0,9200	0,3985	0,4053	0,9832
0,6300	0,9300	0,3946	0,4I0I	0,9620
0,6400	0,9400	0,3906	0,4I49	0,94I5
0,6500	0,9500	0,3867	0,4I96	0,92I7
0,6600	0,9600	0,3829	0,4243	0,9025
0,6700	0,9700	0,379I	0,4289	0,8839
0,6800	0,9800	0,3753	0,4335	0,8659
0,6900	0,9900	0,37I6	0,4380	0,8484
0,7000	I,0000	0,3679	0,4425	0,83I4
0,7I00	I,0I00	0,3642	0,4469	0,8I49
0,7200	I,0200	0,3606	0,45I3	0,7989
0,7300	I,0300	0,3570	0,4557	0,7834
0,7400	I,0400	0,3535	0,4600	0,7683
0,7500	I,0500	0,3499	0,4643	0,7536
0,7600	I,0600	0,3465	0,4686	0,7394
0,7700	I,0700	0,3430	0,4728	0,7255
0,7800	I,0800	0,3396	0,4770	0,7I20
0,7900	I,0900	0,3362	0,48II	0,6989
0,8000	I,I000	0,3329	0,4852	0,686I
0,8I00	I,II00	0,3296	0,4892	0,6736
0,8200	I,I200	0,3263	0,4933	0,66I5
0,8300	I,I300	0,3230	0,4972	0,6497
0,8400	I,I400	0,3I98	0,50I2	0,638I
0,8500	I,I500	0,3I66	0,505I	0,6269
0,8600	I,I600	0,3I35	0,5090	0,6I59
0,8700	I,I700	0,3I04	0,5I28	0,6052
0,8800	I,I800	0,3073	0,5I66	0,5948
0,8900	I,I900	0,3042	0,5204	0,5846
0,9000	I,2000	0,30I2	0,524I	0,5747
0,9I00	I,2I00	0,2982	0,5278	0,5650
0,9200	I,2200	0,2952	0,53I5	0,5555
0,9300	I,2300	0,2923	0,535I	0.5462

F	Z	S	E^{*}	r
		M = 0,30		
0,9400	I,2400	0,2894	0,5387	0,5372
0,9500	I,2500	0,2865	0,5423	0,5284
0,9600	I,2600	0,2837	0,5458	0,5I97
0,9700	I,2700	0,2808	0,5493	0,5II3
0,9800	I,2800	0,2780	0,5528	0,5030
0,9900	I,2900	0,2753	0,5562	0,4949
I,0000	I,3000	0,2725	0,5596	0,4870
I,0I00	I,3I00	0,2698	0,5630	0,4793
I,0200	I,3200	0,267I	0,5663	0,47I7
I,0300	I,3300	0,2645	0,5696	0,4643
I,0400	I,3400	0,26I8	0,5729	0,457I
I,0500	I,3500	0,2592	0,576I	0,4500
I,0600	I,3600	0,2567	0,5794	0,4430
I,0700	I,3700	0,254I	0,5826	0,4362
I,0800	I,3800	0,25I6	0,5857	0,4295
I,0900	I,3900	0,249I	0,5889	0,4230
I,I000	I,4000	0,2466	0,5920	0,4I66
I,II00	I,4I00	0,244I	0,5950	0,4I03
I,I200	I,4200	0,24I7	0,598I	0,404I
I,I300	I,4300	0,2393	0,60II	0,398I
I,I400	I,4400	0,2369	0,604I	0,3922
I,I500	I,4500	0,2346	0,607I	0,3864
I,I600	I,4600	0,2322	0,6I00	0,3807
I,I700	I,4700	0,2299	0,6I29	0,375I
I,I800	I,4800	0,2276	0,6I58	0,3697
I,I900	I,4900	0,2254	0,6I87	0,3643
I,2000	I,5000	0,223I	0,62I5	0,3590
I,2I00	I,5I00	0,2209	0,6243	0,3539
I,2200	I,5200	0,2I87	0,627I	0,3488
I,2300	I,5300	0,2I65	0,6298	0,3438
I,2400	I,5400	0,2I44	0,6326	0,3389
I,2500	I,5500	0,2I22	0,6353	0,334I
I,2600	I,5600	0,2I0I	0,6380	0,3294
I,2700	I,5700	0,2080	0,6406	0,3248
I,2800	I,5800	0,2060	0,6433	0,3202

F	Z	S	E^{*}	r
		M = 0,30		
I,2900	I,5900	0,2039	0,6459	0,3I57
I,3000	I,6000	0,20I9	0,6485	0,3II3
I,3I00	I,6I00	0,I999	0,65I0	0,3070
I,3200	I,6200	0,I979	0,6536	0,3028
I,3300	I,6300	0,I959	0,656I	0,2986
I,3400	I,6400	0,I940	0,6586	0,2945
I,3500	I,6500	0,I920	0,66II	0,2905
I,3600	I,6600	0,I90I	0,6635	0,2866
I,3700	I,6700	0,I882	0,6659	0,2827
I,3800	I,6800	0,I864	0,6683	0,2789
I,3900	I,6900	0,I845	0,6707	0,275I
I,4000	I,7000	0,I827	0,673I	0,27I4
I,4I00	I,7I00	0,I809	0,6754	0,2678
I,4200	I,7200	0,I79I	0,6777	0,2642
I,4300	I,7300	0,I773	0,6800	0,2607
I,4400	I,7400	0,I755	0,6823	0,2572
I,4500	I,7500	0,I738	0,6846	0,2538
I,4600	I,7600	0,I720	0,6868	0,2505
I,4700	I,7700	0,I703	0,6890	0,2472
I,4800	I,7800	0,I686	0,69I2	0,2440
I,4900	I,7900	0,I670	0,6934	0,2408
I,5000	I,8000	0,I653	0,6956	0,2376
		M = 0,35		
0,0I00	0,3600	0,6977	0,0084	83,0777
0,0200	0,3700	0,6907	0,0I67	4I,3I9I
0,0300	0,3800	0,6839	0,0250	27,400I
0,0400	0,3900	0,677I	0,033I	20,44II
0,0500	0,4000	0,6703	0,04I2	I6,2660
0,0600	0,4I00	0,6637	0,0492	I3,4828
0,0700	0,4200	0,6570	0,0572	II,495I
0,0800	0,4300	0,6505	0,0650	I0,0045
0,0900	0,4400	0,6440	0,0728	8,8454
0,I000	0,4500	0,6376	0,0805	7,9I82
0,II00	0,4600	0,63I3	0,0382	7,I597

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,35		
0,I200	0,4700	0,6250	0,0957	6,5278
0,I300	0,4800	0,6I88	0,I032	5,9933
0,I400	0,4900	0,6I26	0,II07	5,5352
0,I500	0,5000	0,6065	0,II80	5,I383
0,I600	0,5I00	0,6005	0,I253	4,79II
0,I700	0,5200	0,5945	0,I326	4,4849
0,I800	0,5300	0,5886	0,I397	4,2I28
0,I900	0,5400	0,5827	0,I468	3,9694
0,2000	0,5500	0,5769	0,I538	3,7504
0,2I00	0,5600	0,57I2	0,I608	3,5524
0,2200	0,5700	0,5655	0,I677	3,3724
0,2300	0,5800	0,5599	0,I745	3,2082
0,2400	0,5900	0,5543	0,I8I3	3,0577
0,2500	0,6000	0,5488	0,I880	2,9I93
0,2600	0,6I00	0,5434	0,I946	2,79I6
0,2700	0,6200	0,5379	0,20I2	2,6734
0,2800	0,6300	0,5326	0,2077	2,5638
0,2900	0,6400	0,5273	0,2I42	2,46I7
0,3000	0,6500	0,5220	0,2206	2,3665
0,3I00	0,6600	0,5I69	0,2269	2,2775
0,3200	0,6700	0,5II7	0,2332	2,I942
0,3300	0,6800	0,5066	0,2394	2,II59
0,3400	0,6900	0,50I6	0,2456	2,0422
0,3500	0,7000	0,4966	0,25I7	I,9729
0,3600	0,7I00	0,49I6	0,2578	I,9074
0,3700	0,7200	0,4868	0,2638	I,8455
0,3800	0,7300	0,48I9	0,2697	I,7869
0,3900	0,7400	0,477I	0,2756	I,73I3
0,4000	0,7500	0,4724	0,28I4	I,6786
0,4I00	0,7600	0,4677	0,2872	I,6285
0,4200	0,7700	0,4630	0,2929	I,5808
0,4300	0,7800	0,4584	0,2986	I,5353
0,4400	0,7900	0,4538	0,3042	I,4920
0,4500	0,8000	0,4493	0,3098	I,4506
0,4600	0,8I00	0,4449	0,3I53	I,4III

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,35		
0,4700	0,8200	0,4404	0,3207	I,3732
0,4800	0,8300	0,4360	0,326I	I,3370
0,4900	0,8400	0,43I7	0,33I5	I,3023
0,5000	0,8500	0,4274	0,3368	I,2690
0,5I00	0,8600	0,4232	0,342I	I,2370
0,5200	0,8700	0,4I90	0,3473	I,2063
0,5300	0,8800	0,4I48	0,3525	I,I768
0,5400	0,8900	0,4I07	0,3576	I,I484
0,5500	0,9000	0,4066	0,3627	I,I2II
0,5600	0,9I00	0,4025	0,3677	I,0948
0,5700	0,9200	0,3985	0,3727	I,0694
0,5800	0,9300	0,3946	0,3776	I,0449
0,5900	0,9400	0,3906	0,3825	I,02I3
0,6000	0,9500	0,3867	0,3873	0,9985
0,6I00	0,9600	0,3829	0,392I	0,9765
0,6200	0,9700	0,379I	0,3969	0,9552
0,6300	0,9800	0,3753	0,40I6	0,9346
0,6400	0,9900	0,37I6	0,4063	0,9I46
0,6500	I,0000	0,3679	0,4I09	0,8953
0,6600	I,0I00	0,3642	0,4I55	0,8767
0,6700	I,0200	0,3606	0,4200	0,8586
0,6800	I,0300	0,3570	0,4245	0,84I0
0,6900	I,0400	0,3535	0,4290	0,8240
0,7000	I,0500	0,3499	0,4334	0,8075
0,7I00	I,0600	0,3465	0,4378	0,79I4
0,7200	I,0700	0,3430	0,442I	0,7759
0,7300	I,0800	0,3396	0,4464	0,7608
0,7400	I,0900	0,3362	0,4506	0,746I
0,7500	I,I000	0,3329	0,4549	0,73I8
0,7600	I,II00	0,3296	0,4590	0,7I79
0,7700	I,I200	0,3263	0,4632	0,7044
0,7800	I,I300	0,3230	0,4673	0,69I3
0,7900	I,I400	0,3I98	0,47I4	0,6785
0,8000	I,I500	0,3I66	0,4754	0,666I
0,8I00	I,I600	0,3I35	0,4794	0,6539

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,35		
0,8200	I,I700	0,3I04	0,4833	0,642I
0,8300	I,I800	0,3073	0,4873	0,6306
0,8400	I,I900	0,3042	0,49II	0,6I94
0,8500	I,2000	0,30I2	0,4950	0,6085
0,8600	I,2I00	0,2982	0,4988	0,5978
0,8700	I,2200	0,2952	0,5026	0,5874
0,8800	I,2300	0,2923	0,5063	0,5773
0,8900	I,2400	0,2894	0,5I00	0,5674
0,9000	I,2500	0,2865	0,5I37	0,5577
0,9I00	I,2600	0,2837	0,5I74	0,5483
0,9200	I,2700	0,2808	0,52I0	0,539I
0,9300	I,2800	0,2780	0,5246	0,5300
0,9400	I,2900	0,2753	0,528I	0,52I3
0,9500	I,3000	0,2725	0,53I6	0,5I27
0,9600	I,3I00	0,2698	0,535I	0,5042
0,9700	I,3200	0,267I	0,5385	0,4960
0,9800	I,3300	0,2645	0,5420	0,4880
0,9900	I,3400	0,26I8	0,5454	0,480I
I,0000	I,3500	0,2592	0,5487	0,4725
I,0I00	I,3600	0,2567	0,5520	0,4649
I,0200	I,3700	0,254I	0,5553	0,4576
I,0300	I,3800	0,25I6	0,5586	0,4504
I,0400	I,3900	0,249I	0,56I8	0,4433
I,0500	I,4000	0,2466	0,565I	0,4364
I,0600	I,4I00	0,244I	0,5682	0,4297
I,0700	I,4200	0,24I7	0,57I4	0,4230
I,0800	I,4300	0,2393	0,5745	0,4I65
I,0900	I,4400	0,2369	0,5776	0,4I02
I,I000	I,4500	0,2346	0,5807	0,4040
I,II00	I,4600	0,2322	0,5837	0,3979
I,I200	I,4700	0,2299	0,5867	0,39I9
I,I300	I,4800	0,2276	0,5897	0,3860
I,I400	I,4900	0,2254	0,5927	0,3803
I,I500	I,5000	0,223I	0,5956	0,3746
I,I600	I,5I00	0,2209	0,5985	0,369I

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,35		
I,I700	I,5200	0,2I87	0,60I4	0,3637
I,I800	I,5300	0,2I65	0,6042	0,3584
I,I900	I,5400	0,2I44	0,607I	0,353I
I,2000	I,5500	0,2I22	0,6099	0,3480
I,2I00	I,5600	0,2I0I	0,6I27	0,3430
I,2200	I,5700	0,2080	0,6I54	0,338I
I,2300	I,5800	0,2060	0,6I8I	0,3332
I,2400	I,5900	0,2039	0,6208	0,3285
I,2500	I,6000	0,20I9	0,6235	0,3238
I,2600	I,6I00	0,I999	0,6262	0,3I92
I,2700	I,6200	0,I979	0,6288	0,3I47
I,2800	I,6300	0,I959	0,63I4	0,3I03
I,2900	I,6400	0,I940	0,6340	0,3060
I,3000	I,6500	0,I920	0,6366	0,30I7
I,3I00	I,6600	0,I90I	0,639I	0,2975
I,3200	I,6700	0,I882	0,64I6	0,2934
I,3300	I,6800	0,I864	0,644I	0,2893
I,3400	I,6900	0,I845	0,6466	0,2854
I,3500	I,7000	0,I827	0,6490	0,28I5
I,3600	I,7I00	0,I809	0,65I5	0,2776
I,3700	I,7200	0,I79I	0,6539	0,2739
I,3800	I,7300	0,I773	0,6563	0,270I
I,3900	I,7400	0,I755	0,6586	0,2665
I,4000	I,7500	0,I738	0,66I0	0,2629
I,4I00	I,7600	0,I720	0,6633	0,2594
I,4200	I,7700	0,I703	0,6656	0,2559
I,4300	I,7800	0,I686	0,6679	0,2525
I,4400	I,7900	0,I670	0,6702	0,249I
I,4500	I,8000	0,I653	0,6742	0,2458
I,4600	I,8I00	0,I637	0,6746	0,2426
I,4700	I,8200	0,I620	0,6768	0,2394
I,4800	I,8300	0,I604	0,6790	0,2362
I,4900	I,8400	0,I588	0,68I2	0,2332
I,5000	I,8500	0,I572	0,6833	0,230I

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,40		
0,0I00	0,4I00	0,6637	0,0082	80,8969
0,0200	0,4200	0,6570	0,0I63	40,2328
0,0300	0,4300	0,6505	0,0244	26,6787
0,0400	0,4400	0,6440	0,0324	I9,9020
0,0500	0,4500	0,6376	0,0403	I5,8364
0,0600	0,4600	0,63I3	0,048I	I3,I262
0,0700	0,4700	0,6250	0,0559	II,I906
0,0800	0,4800	0,6I88	0,0635	9,739I
0,0900	0,4900	0,6I26	0,07I2	8,6I03
0,I000	0,5000	0,6065	0,0787	7,7075
0,II00	0,5I00	0,6005	0,0862	6,9689
0,I200	0,5200	0,5945	0,0936	6,3536
0,I300	0,5300	0,5886	0,I009	5,833I
0,I400	0,5400	0,5827	0,I082	5,3870
0,I500	0,5500	0,5769	0,II54	5,0005
0,I600	0,5600	0,57I2	0,I225	4,6625
0,I700	0,5700	0,5655	0,I296	4,3643
0,I800	0,5800	0,5599	0,I366	4,0993
0,I900	0,5900	0,5543	0,I435	3,8623
0,2000	0,6000	0,5488	0,I504	3,649I
0,2I00	0,6I00	0,5434	0,I572	3,4563
0,2200	0,6200	0,5379	0,I640	3,28I0
0,2300	0,6300	0,5326	0,I706	3,I2II
0,2400	0,6400	0,5273	0,I773	2,9746
0,2500	0,6500	0,5220	0,I838	2,8399
0,2600	0,6600	0,5I69	0,I903	2,7I59
0,2700	0,6700	0,5II7	0,I968	2,6005
0,2800	0,6800	0,5066	0,2032	2,4937
0,2900	0,6900	0,50I6	0,2095	2,3944
0,3000	0,7000	0,4966	0,2I57	2,30I7
0,3I00	0,7I00	0,49I6	0,2220	2,2I50
0,3200	0,7200	0,4868	0,228I	2,I338
0,3300	0,7300	0,48I9	0,2342	2,0576
0,3400	0,7400	0,477I	0,2402	I,9859
0,3500	0,7500	0,4724	0,2462	I,9I84

F	Z	S	E*	r
		M = 0,40		
0,3600	0,7600	0,4677	0,2522	I,8547
0,3700	0,7700	0,4630	0,2580	I,7944
0,3800	0,7800	0,4584	0,2639	I,7374
0,3900	0,7900	0,4538	0,2696	I,6833
0,4000	0,8000	0,4493	0,2753	I,63I9
0,4I00	0,8I00	0,4449	0,28I0	I,583I
0,4200	0,8200	0,4404	0,2866	I,5367
0,4300	0,8300	0,4360	0,2922	I,4925
0,4400	0,8400	0,43I7	0,2977	I,4503
0,4500	0,8500	0,4274	0,303I	I,4I00
0,4600	0,8600	0,4232	0,3085	I,37I5
0,4700	0,8700	0,4I90	0,3I39	I,3347
0,4800	0,8800	0,4I48	0,3I92	I,2994
0,4900	0,8900	0,4I07	0,3245	I,2656
0,5000	0,9000	0,4066	0,3297	I,2332
0,5I00	0,9I00	0,4025	0,3348	I,202I
0,5200	0,9200	0,3985	0,3400	I,I722
0,5300	0,9300	0,3946	0,3450	I,I435
0,5400	0,9400	0,3906	0,350I	I,II59
0,5500	0,9500	0,3867	0,3550	I,0893
0,5600	0,9600	0,3829	0,3600	I,0637
0,5700	0,9700	0,379I	0,3649	I,0390
0,5800	0,9800	0,3753	0,3697	I,0I5I
0,5900	0,9900	0,37I6	0,3745	0,9922
0,6000	I,0000	0,3679	0,3793	0,9700
0,6I00	I,0I00	0,3642	0,3840	0,9485
0,6200	I,0200	0,3606	0,3887	0,9278
0,6300	I,0300	0,3570	0,3933	0,9078
0,6400	I,0400	0,3535	0,3979	0,8884
0,6500	I,0500	0,3499	0,4024	0,8696
0,6600	I,0600	0,3465	0,4069	0,85I4
0,6700	I,0700	0,3430	0,4II4	0,8338
0,6800	I,0800	0,3396	0,4I58	0,8I67
0,6900	I,0900	0,3362	0,4202	0,800I
0,7000	I,I000	0,3329	0,4245	0,784I

F	Z	S	E*	r
		M = 0,40		
0,7I00	I,II00	0,3296	0,4288	0,7685
0,7200	I,I200	0,3263	0,433I	0,7533
0,7300	I,I300	0,3230	0,4373	0,7386
0,7400	I,I400	0,3I98	0,44I5	0,7244
0,7500	I,I500	0,3I66	0,4457	0,7I05
0,7600	I,I600	0,3I35	0,4498	0,6970
0,7700	I,I700	0,3I04	0,4539	0,6838
0,7800	I,I800	0,3073	0,4579	0,67II
0,7900	I,I900	0,3042	0,46I9	0,6586
0,8000	I,2000	0,30I2	0,4659	0,6465
0,8I00	I,2I00	0,2982	0,4698	0,6347
0,8200	I,2200	0,2952	0,4737	0,6232
0,8300	I,2300	0,2923	0,4776	0,6I2I
0,8400	I,2400	0,2894	0,48I4	0,60II
0,8500	I,2500	0,2865	0,4852	0,5905
0,8600	I,2600	0,2837	0,4889	0,580I
0,8700	I,2700	0,2808	0,4927	0,5700
0,8800	I,2800	0,2780	0,4963	0,5602
0,8900	I,2900	0,2753	0,5000	0,5505
0,9000	I,3000	0,2725	0,5036	0,54II
0,9I00	I,3I00	0,2698	0,5072	0,5320
0,9200	I,3200	0,267I	0,5I08	0,5230
0,9300	I,3300	0,2645	0,5I43	0,5I42
0,9400	I,3400	0,26I8	0,5I78	0,5057
0,9500	I,3500	0,2592	0,52I3	0,4973
0,9600	I,3600	0,2567	0,5247	0,489I
0,9700	I,3700	0,254I	0,528I	0,48I2
0,9800	I,3800	0,25I6	0,53I5	0,4733
0,9900	I,3900	0,249I	0,5348	0,4657
I,0000	I,4000	0,2466	0,538I	0,4582
I,0I00	I,4I00	0,244I	0,54I4	0,4509
I,0200	I,4200	0,24I7	0,5447	0,4438
I,0300	I,4300	0,2393	0,5479	0,4368
I,0400	I,4400	0,2369	0,55II	0,4299
I,0500	I,4500	0,2346	0,5543	0,4232

F	Z	S	E*	r
		M = 0,40		
I,0600	I,4600	0,2322	0,5574	0,4I66
I,0700	I,4700	0,2299	0,5605	0,4I02
I,0800	I,4800	0,2276	0,5636	0,4039
I,0900	I,4900	0,2254	0,5667	0,3977
I,I000	I,5000	0,223I	0,5697	0,39I7
I,II00	I,5I00	0,2209	0,5727	0,3857
I,I200	I,5200	0,2I87	0,5757	0,3799
I,I300	I,5300	0,2I65	0,5786	0,3742
I,I400	I,5400	0,2I44	0,58I6	0,3686
I,I500	I,5500	0,2I22	0,5845	0,3632
I,I600	I,5600	0,2I0I	0,5873	0,3578
I,I700	I,5700	0,2080	0,5902	0,3525
I,I800	I,5800	0,2060	0,5930	0,3473
I,I900	I,5900	0,2039	0,5958	0,3423
I,2000	I,6000	0,20I9	0,5986	0,3373
I,2I00	I,6I00	0,I999	0,60I3	0,3324
I,2200	I,6200	0,I979	0,604I	0,3276
I,2300	I,6300	0,I959	0,6068	0,3229
I,2400	I,6400	0,I940	0,6094	0,3I83
I,2500	I,6500	0,I920	0,6I2I	0,3I38
I,2600	I,6600	0,I90I	0,6I47	0,3093
I,2700	I,6700	0,I882	0,6I73	0,3049
I,2800	I,6800	0,I864	0,6I99	0,3006
I,2900	I,6900	0,I845	0,6225	0,2964
I,3000	I,7000	0,I827	0,6250	0,2923
I,3I00	I,7I00	0,I809	0,6275	0,2882
I,3200	I,7200	0,I79I	0,6300	0,2842
I,3300	I,7300	0,I773	0,6325	0,2803
I,3400	I,7400	0,I755	0,6349	0,2764
I,3500	I,7500	0,I738	0,6374	0,2726
I,3600	I,7600	0,I720	0,6398	0,2689
I,3700	I,7700	0,I703	0,6422	0,2652
I,3800	I,7800	0,I686	0,6445	0,26I6
I,3900	I,7900	0,I670	0,6469	0,258I
I,4000	I,8000	0,I653	0,6492	0,2546

F	Z	S	E*	r
		M = 0,40		
I,4I00	I,8I00	0,I637	0,65I5	0,25I2
I,4200	I,8200	0,I620	0,6538	0,2478
I,4300	I,8300	0,I604	0,656I	0,2445
I,4400	I,8400	0,I588	0,6583	0,24I2
I,4500	I,8500	0,I572	0,6605	0,2380
I,4600	I,8600	0,I557	0,6628	0,2349
I,4700	I,8700	0,I54I	0,6649	0,23I8
I,4800	I,8800	0,I526	0,667I	0,2287
I,4900	I,8900	0,I5II	0,6693	0,2257
I,5000	I,9000	0,I496	0,67I4	0,2228
		M = 0,45		
0,0I00	0,4600	0,63I3	0,0080	78,757I
0,0200	0,4700	0,6250	0,0I60	39,I670
0,0300	0,4800	0,6I88	0,0238	25,9709
0,0400	0,4900	0,6I26	0,03I6	I9,3732
0,0500	0,5000	0,6065	0,0393	I5,4I49
0,0600	0,5I00	0,6005	0,0470	I2,7764
0,0700	0,5200	0,5945	0,0546	I0,89I9
0,0800	0,5300	0,5886	0,062I	9,4787
0,0900	0,5400	0,5827	0,0695	8,3798
0,I000	0,5500	0,5769	0,0769	7,5008
0,II00	0,5600	0,57I2	0,0842	6,78I8
0,I200	0,5700	0,5655	0,09I5	6,I827
0,I300	0,5800	0,5599	0,0986	5,6760
0,I400	0,5900	0,5543	0,I058	5,24I7
0,I500	0,6000	0,5488	0,II28	4,8655
0,I600	0,6I00	0,5434	0,II98	4,5364
0,I700	0,6200	0,5379	0,I267	4,246I
0,I800	0,6300	0,5326	0,I335	3,988I
0,I900	0,6400	0,5273	0,I403	3,7574
0,2000	0,6500	0,5220	0,I47I	3,5498
0,2I00	0,6600	0,5I69	0,I537	3,362I
0,2200	0,6700	0,5II7	0,I603	3,I9I5
0,2300	0,6800	0,5066	0,I669	3,0358

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,45		
0,2400	0,6900	0,50I6	0,I734	2,8932
0,2500	0,7000	0,4966	0,I798	2,7620
0,2600	0,7I00	0,49I6	0,I862	2,64I0
0,2700	0,7200	0,4868	0,I925	2,5290
0,2800	0,7300	0,48I9	0,I987	2,425I
0,2900	0,7400	0,477I	0,2049	2,3284
0,3000	0,7500	0,4724	0,2III	2,238I
0,3I00	0,7600	0,4677	0,2I7I	2,I538
0,3200	0,7700	0,4630	0,2232	2,0748
0,3300	0,7800	0,4584	0,229I	2,0006
0,3400	0,7900	0,4538	0,235I	I,9308
0,3500	0,8000	0,4493	0,2409	I,865I
0,3600	0,8I00	0,4449	0,2467	I,8030
0,3700	0,8200	0,4404	0,2525	I,7444
0,3800	0,8300	0,4360	0,2582	I,6888
0,3900	0,8400	0,43I7	0,2638	I,6362
0,4000	0,8500	0,4274	0,2695	I,5862
0,4I00	0,8600	0,4232	0,2750	I,5387
0,4200	0,8700	0,4I90	0,2805	I,4936
0,4300	0,8800	0,4I48	0,2860	I,4505
0,4400	0,8900	0,4I07	0,29I4	I,4094
0,4500	0,9000	0,4066	0,2967	I,3702
0,4600	0,9I00	0,4025	0,3020	I,3328
0,4700	0,9200	0,3985	0,3073	I,2969
0,4800	0,9300	0,3946	0,3I25	I,2626
0,4900	0,9400	0,3906	0,3I77	I,2297
0,5000	0,9500	0,3867	0,3228	I,I982
0,5I00	0,9600	0,3829	0,3278	I,I679
0,5200	0,9700	0,379I	0,3329	I,I389
0,5300	0,9800	0,3753	0,3378	I,II09
0,5400	0,9900	0,37I6	0,3428	I,0840
0,5500	I,0000	0,3679	0,3477	I,058I
0,5600	I,0I00	0,3642	0,3525	I,0332
0,5700	I,0200	0,3606	0,3573	I,0092
0,5800	I,0300	0,3570	0,362I	0,9860

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,45		
0,5900	I,0400	0,3535	0,3668	0,9636
0,6000	I,0500	0,3499	0,37I5	0,9420
0,6I00	I,0600	0,3465	0,376I	0,92I2
0,6200	I,0700	0,3430	0,3807	0,90I0
0,6300	I,0800	0,3396	0,3852	0,88I5
0,6400	I,0900	0,3362	0,3897	0,8627
0,6500	I,I000	0,3329	0,3942	0,8444
0,6600	I,II00	0,3296	0,3986	0,8267
0,6700	I,I200	0,3263	0,4030	0,8096
0,6800	I,I300	0,3230	0,4074	0,7930
0,6900	I,I400	0,3I98	0,4II7	0,7768
0,7000	I,I500	0,3I66	0,4I60	0,76I2
0,7I00	I,I600	0,3I35	0,4202	0,746I
0,7200	I,I700	0,3I04	0,4244	0,73I3
0,7300	I,I800	0,3073	0,4285	0,7I70
0,7400	I,I900	0,3042	0,4327	0,703I
0,7500	I,2000	0,30I2	0,4368	0,6896
0,7600	I,2I00	0,2982	0,4408	0,6765
0,7700	I,2200	0,2952	0,4448	0,6637
0,7800	I,2300	0,2923	0,4488	0,65I3
0,7900	I,2400	0,2894	0,4527	0,6392
0,8000	I,2500	0,2865	0,4566	0,6274
0,8I00	I,2600	0,2837	0,4605	0,6I60
0,8200	I,2700	0,2808	0,4643	0,6048
0,8300	I,2800	0,2780	0,468I	0,5939
0,8400	I,2900	0,2753	0,47I9	0,5833
0,8500	I,3000	0,2725	0,4757	0,5730
0,8600	I,3I00	0,2698	0,4794	0,5629
0,8700	I,3200	0,267I	0,4830	0,5530
0,8800	I,3300	0,2645	0,4867	0,5435
0,8900	I,3400	0,26I8	0,4903	0,534I
0,9000	I,3500	0,2592	0,4938	0,5249
0,9I00	I,3600	0,2567	0,4974	0,5I60
0,9200	I,3700	0,254I	0,5009	0,5073
0,9300	I,3800	0,25I6	0,5044	0,4988

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,45		
0,9400	I,3900	0,249I	0,5078	0,4905
0,9500	I,4000	0,2466	0,5II2	0,4824
0,9600	I,4I00	0,244I	0,5I46	0,4744
0,9700	I,4200	0,24I7	0,5I80	0,4666
0,9800	I,4300	0,2393	0,52I3	0,459I
0,9900	I,4400	0,2369	0,5246	0,45I6
I,0000	I,4500	0,2346	0,5279	0,4444
I,0I00	I,4600	0,2322	0,53II	0,4373
I,0200	I,4700	0,2299	0,5343	0,4303
I,0300	I,4800	0,2276	0,5375	0,4235
I,0400	I,4900	0,2254	0,5407	0,4I68
I,0500	I,5000	0,223I	0,5438	0,4I03
I,0600	I,5I00	0,2209	0,5469	0,4039
I,0700	I,5200	0,2I87	0,5500	0,3977
I,0800	I,5300	0,2I65	0,5530	0,39I5
I,0900	I,5400	0,2I44	0,556I	0,3855
I,I000	I,5500	0,2I22	0,5590	0,3797
I,II00	I,5600	0,2I0I	0,5620	0,3739
I,I200	I,5700	0,2080	0,5650	0,3682
I,I300	I,5800	0,2060	0,5679	0,3627
I,I400	I,5900	0,2039	0,5708	0,3573
I,I500	I,6000	0,20I9	0,5736	0,3520
I,I600	I,6I00	0,I999	0,5765	0,3467
I,I700	I,6200	0,I979	0,5793	0,34I6
I,I800	I,6300	0,I959	0,582I	0,3366
I,I900	I,6400	0,I940	0,5849	0,33I7
I,2000	I,6500	0,I920	0,5876	0,3268
I,2I00	I,6600	0,I90I	0,5903	0,322I
I,2200	I,6700	0,I882	0,5930	0,3I74
I,2300	I,6800	0,I864	0,5957	0,3I29
I,2400	I,6900	0,I845	0,5983	0,3084
I,2500	I,7000	0,I827	0,60I0	0,3040
I,2600	I,7I00	0,I809	0,6036	0,2997
I,2700	I,7200	0,I79I	0,6062	0,2954
I,2800	I,7300	0,I773	0,6087	0,29I2

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,45		
I,2900	I,7400	0,I755	0,6II3	0,287I
I,3000	I,7500	0,I738	0,6I38	0,283I
I,3I00	I,7600	0,I720	0,6I63	0,2792
I,3200	I,7700	0,I703	0,6I87	0,2753
I,3300	I,7800	0,I686	0,62I2	0,27I5
I,3400	I,7900	0,I670	0,6236	0,2677
I,3500	I,8000	0,I653	0,6260	0,2640
I,3600	I,8I00	0,I637	0,6284	0,2604
I,3700	I,8200	0,I620	0,6308	0,2569
I,3800	I,8300	0,I604	0,633I	0,2534
I,3900	I,8400	0,I588	0,6355	0,2499
I,4000	I,8500	0,I572	0,6378	0,2465
I,4I00	I,8600	0,I557	0,640I	0,2432
I,4200	I,8700	0,I54I	0,6423	0,2399
I,4300	I,8800	0,I526	0,6446	0,2367
I,4400	I,8900	0,I5II	0,6468	0,2336
I,4500	I,9000	0,I496	0,6490	0,2305
I,4600	I,9I00	0,I48I	0,65I2	0,2274
I,4700	I,9200	0,I466	0,6534	0,2244
I,4800	I,9300	0,I45I	0,6555	0,22I4
I,4900	I,9400	0,I437	0,6577	0,2I85
I,5000	I,9500	0,I423	0,6598	0,2I56
		M = 0,50		
0,0I00	0,5I00	0,6005	0,0078	76,6582
0,0200	0,5200	0,5945	0,0I56	38,I2I6
0,0300	0,5300	0,5886	0,0233	25,2766
0,0400	0,5400	0,5827	0,0309	I8,8546
0,0500	0,5500	0,5769	0,0385	I5,00I6
0,0600	0,5600	0,57I2	0,0459	I2,4333
0,0700	0,5700	0,5655	0,0534	I0,5990
0,0800	0,5800	0,5599	0,0607	9,2235
0,0900	0,5900	0,5543	0,0680	8,I538
0,I000	0,6000	0,5488	0,0752	7,2982
0,II00	0,6I00	0,5434	0,0823	6,5983

F	Z	S	E*	r
		M = 0,50		
0,I200	0,6200	0,5379	0,0894	6,0I52
0,I300	0,6300	0,5326	0,0964	5,5220
0,I400	0,6400	0,5273	0,I034	5,0993
0,I500	0,6500	0,5220	0,II03	4,733I
0,I600	0,6600	0,5I69	0,II7I	4,4I27
0,I700	0,6700	0,5II7	0,I239	4,I302
0,I800	0,6800	0,5066	0,I306	3,879I
0,I900	0,6900	0,50I6	0,I372	3,6545
0,2000	0,7000	0,4966	0,I438	3,4525
0,2I00	0,7I00	0,49I6	0,I504	3,2698
0,2200	0,7200	0,4868	0,I568	3,I038
0,2300	0,7300	0,48I9	0,I632	2,9523
0,2400	0,7400	0,477I	0,I696	2,8I34
0,2500	0,7500	0,4724	0,I759	2,6858
0,2600	0,7600	0,4677	0,I82I	2,5680
0,2700	0,7700	0,4630	0,I883	2,4590
0,2800	0,7800	0,4584	0,I944	2,3578
0,2900	0,7900	0,4538	0,2005	2,2637
0,3000	0,8000	0,4493	0,2065	2,I759
0,3I00	0,8I00	0,4449	0,2I25	2,0938
0,3200	0,8200	0,4404	0,2I84	2,0I69
0,3300	0,8300	0,4360	0,2242	I,9447
0,3400	0,8400	0,43I7	0,2300	I,8768
0,3500	0,8500	0,4274	0,2358	I,8I28
0,3600	0,8600	0,4232	0,24I5	I,7525
0,3700	0,8700	0,4I90	0,247I	I,6954
0,3800	0,8800	0,4I48	0,2527	I,64I4
0,3900	0,8900	0,4I07	0,2583	I,590I
0,4000	0,9000	0,4066	0,2637	I,54I5
0,4I00	0,9I00	0,4025	0,2692	I,4953
0,4200	0,9200	0,3985	0,2746	I,45I3
0,4300	0,9300	0,3946	0,2799	I,4094
0,4400	0,9400	0,3906	0,2852	I,3695
0,4500	0,9500	0,3867	0,2905	I,33I3
0,4600	0,9600	0,3829	0,2957	I,2949

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,50		
0,4700	0,9700	0,379I	0,3009	I,2600
0,4800	0,9800	0,3753	0,3060	I,2266
0,4900	0,9900	0,37I6	0,3II0	I,I946
0,5000	I,0000	0,3679	0,3I6I	I,I640
0,5I00	I,0I00	0,3642	0,32I0	I,I345
0,5200	I,0200	0,3606	0,3260	I,I062
0,5300	I,0300	0,3570	0,3309	I,0790
0,5400	I,0400	0,3535	0,3357	I,0529
0,5500	I,0500	0,3499	0,3405	I,0277
0,5600	I,0600	0,3465	0,3453	I,0034
0,5700	I,0700	0,3430	0,3500	0,980I
0,5800	I,0800	0,3396	0,3547	0,9575
0,5900	I,0900	0,3362	0,3593	0,9358
0,6000	I,I000	0,3329	0,3639	0,9I48
0,6I00	I,II00	0,3296	0,3684	0,8945
0,6200	I,I200	0,3263	0,3730	0,8749
0,6300	I,I300	0,3230	0,3774	0,8559
0,6400	I,I400	0,3I98	0,38I9	0,8375
0,6500	I,I500	0,3I66	0,3862	0,8I98
0,6600	I,I600	0,3I35	0,3906	0,8026
0,6700	I,I700	0,3I04	0,3949	0,7859
0,6800	I,I800	0,3073	0,3992	0,7697
0,6900	I,I900	0,3042	0,4034	0,754I
0,7000	I,2000	0,30I2	0,4076	0,7389
0,7I00	I,2I00	0,2982	0,4II8	0,724I
0,7200	I,2200	0,2952	0,4I59	0,7098
0,7300	I,2300	0,2923	0,4200	0,6959
0,7400	I,2400	0,2894	0,424I	0,6824
0,7500	I,2500	0,2865	0,428I	0,6693
0,7600	I,2600	0,2837	0,432I	0,6565
0,7700	I,2700	0,2808	0,4360	0,644I
0,7800	I,2800	0,2780	0,4399	0,6320
0,7900	I,2900	0,2753	0,4438	0,6202
0,8000	I,3000	0,2725	0,4477	0,6088
0,8I00	I,3I00	0,2698	0,45I5	0,5976

F	Z	S	E^*	r
		M = 0,50		
0,8200	I,3200	0,267I	0,4553	0,5868
0,8300	I,3300	0,2645	0,4590	0,5762
0,8400	I,3400	0,26I8	0,4627	0,5659
0,8500	I,3500	0,2592	0,4664	0,5558
0,8600	I,3600	0,2567	0,470I	0,5460
0,8700	I,3700	0,254I	0,4737	0,5365
0,8800	I,3800	0,25I6	0,4773	0,527I
0,8900	I,3900	0,249I	0,4808	0,5I80
0,9000	I,4000	0,2466	0,4843	0,5092
0,9I00	I,4I00	0,244I	0,4878	0,5005
0,9200	I,4200	0,24I7	0,49I3	0,4920
0,9300	I,4300	0,2393	0,4947	0,4837
0,9400	I,4400	0,2369	0,498I	0,4756
0,9500	I,4500	0,2346	0,50I5	0,4677
0,9600	I,4600	0,2322	0,5048	0,4600
0,9700	I,4700	0,2299	0,508I	0,4525
0,9800	I,4800	0,2276	0,5II4	0,445I
0,9900	I,4900	0,2254	0,5I47	0,4379
I,0000	I,5000	0,223I	0,5I79	0,4308
I,0I00	I,5I00	0,2209	0,52II	0,4239
I,0200	I,5200	0,2I87	0,5243	0,4I72
I,0300	I,5300	0,2I65	0,5274	0,4I05
I,0400	I,5400	0,2I44	0,5305	0,404I
I,0500	I,5500	0,2I22	0,5336	0,3977
I,0600	I,5600	0,2I0I	0,5367	0,39I5
I,0700	I,5700	0,2080	0,5397	0,3855
I,0800	I,5800	0,2060	0,5428	0,3795
I,0900	I,5900	0,2039	0,5457	0,3737
I,I000	I,6000	0,20I9	0,5487	0,3680
I,II00	I,6I00	0,I999	0,55I6	0,3624
I,I200	I,6200	0,I979	0,5545	0,3569
I,I300	I,6300	0,I959	0,5574	0,35I5
I,I400	I,6400	0,I940	0,5603	0,3462
I,I500	I,6500	0,I920	0,563I	0,34I0
I,I600	I,6600	0,I90I	0,5659	0,3360

F	Z	S	E^{N}	r
		M = 0,50		
I,I700	I,6700	0,I882	0,5687	0,33I0
I,I800	I,6800	0,I864	0,57I5	0,326I
I,I900	I,6900	0,I845	0,5742	0,32I3
I,2000	I,7000	0,I827	0,5769	0,3I66
I,2I00	I,7I00	0,I809	0,5796	0,3I20
I,2200	I,7200	0,I79I	0,5823	0,3075
I,2300	I,7300	0,I773	0,5849	0,303I
I,2400	I,7400	0,I755	0,5876	0,2987
I,2500	I,7500	0,I738	0,5902	0,2945
I,2600	I,7600	0,I720	0,5927	0,2903
I,2700	I,7700	0,I703	0,5953	0,286I
I,2800	I,7800	0,I686	0,5978	0,282I
I,2900	I,7900	0,I670	0,6003	0,278I
I,3000	I,8000	0,I653	0,6028	0,2742
I,3I00	I,8I00	0,I637	0,6053	0,2704
I,3200	I,8200	0,I620	0,6078	0,2666
I,3300	I,8300	0,I604	0,6I02	0,2629
I,3400	I,8400	0,I588	0,6I26	0,2593
I,3500	I,8500	0,I572	0,6I50	0,2557
I,3600	I,8600	0,I557	0,6I74	0,2522
I,3700	I,8700	0,I54I	0,6I97	0,2487
I,3800	I,8800	0,I526	0,6220	0,2453
I,3900	I,8900	0,I5II	0,6243	0,2420
I,4000	I,9000	0,I496	0,6266	0,2387
I,4I00	I,9I00	0,I48I	0,6289	0,2355
I,4200	I,9200	0,I466	0,63I2	0,2323
I,4300	I,9300	0,I45I	0,6334	0,2292
I,4400	I,9400	0,I437	0,6356	0,226I
I,4500	I,9500	0,I423	0,6378	0,223I
I,4600	I,9600	0,I409	0,6400	0,220I
I,4700	I,9700	0,I395	0,642I	0,2I72
I,4800	I,9800	0,I38I	0,6443	0,2I43
I,4900	I,9900	0,I367	0,6464	0,2II5
I,5000	2,0000	0,I353	0,6485	0,2087

Список рекомендуемой литературы

Б а б а я н В.К. Методические рекомендации к оценке параметров рационального промыслового режима. М. ОНТИ ВНИРО, 1982, 46 с.

Б а р а н о в Ф.И. К вопросу о биологических основаниях рыбного хозяйства. К вопросу о динамике рыбного промысла. -Избранные труды, т.3, М., Пищевая промышленность, 1971, с.12-56 и 56-65.

Б а р ы б и н а И.А. Некоторые способы определения парамет - ров уравнений роста Берталанффи. Труды ВНИРО, 1978, т.128, с.67-71.

Б и в е р т о н Р., Х о л т С. Динамика численности промысловых рыб. Пищевая промышленность, 1969, 248 с.

Б л и н о в В.В. Моделирование естественной смертности рыб младших возрастных групп. Вопросы ихтиологии, 1977, т.17, вып. 3, с.572-578.

Б о р и с о в В.М. Изучение естественной смертности рыб и некоторые методы ее оценки. Автореферат диссертации на соиск. уч. степ.канд.биолог.наук, М., ВНИРО, 1974, 28 с.

Б о р о д и н Р.Г. Состояние запасов и промысла китов в Ан - тарктике (методы исследований). -Рациональное использование ресурсов Мирового океана. Сер.I, вып.2, ЦНИИТЭИРХ, 1974, 70 с.

Б о р о д и н Р.Г. Анализ и применение математических мето - дов оценки возможной добычи морских млекопитающих. -Применение математических способов оценки состояния промысловых объектов Миро - вого океана. Тр.ВНИРО, 1978, т.CXXУIII, с.10-18.

Б о р о д и н Р.Г. Методы оценки состояния запасов морских млекопитающих. Сб. трудов, Морские млекопитающие, 1982, М., ВНИРО, с. 22-32.

Б о р о д и н Р.Г. Методические рекомендации по применению математических моделей для оценки запасов и возможной добычи морских животных, М., ОНТИ ВНИРО, 1983, 50 с.

Б у л г а к о в а Т.И., Е ф и м о в Ю.Н. Метод расчета величины возможного улова с учетом зависимости естественной смертности от возраста. Вопросы ихтиологии, 1982, т. 22, вып. 2, с.200-206.

В и н б е р г Г.Г. Линейные размеры и масса тела животных. -Ж.общей биол., 1971, т.32, № 6, с.714-723.

В и н б е р г Г.Г. Взаимозависимость роста и энергетическо - го обмена у пойкилотермных животных. -В кн.: Количественные аспекты роста организмов, М., Наука, 1975, с.7-25.

Гасюков П.С., Доровских Р.С., Приц С.Э. Методические рекомендации по применению математических методов для оценки запасов и возможного вылова промысловых объектов, Калининград, АтлантНИРО, 1980, 104 с.

Гулин В.В., Руденко Г.П. К методике определения продукции популяций в озерах. 1973, Вопр.ихтиологии, с.977-989.

Доровских Р.С. Об определении коэффициентов естественной и промысловой смертности рыб методом Бивертона и Холта. В кн.: Состояние запасов и основы рационального рыболовства в Атлантическом океане, Калининград, 1981, с.30-34.

Ефимов Ю.Н. Оценка смертности тихоокеанского окуня Ванкуверо-Вашингтонского района. -Э.-И.Рыбохозяйственное использование ресурсов Мирового океана, ЦНИИТЭИРХ, вып.8, 1978, с. 10-15.

Ефимов Ю.Н., Игошин Н.М. Оценка параметров уравнения роста Берталанфи с помощью ЭВМ. Рыбное хозяйство, 1976, №11, с.33-34.

Ефимов Ю.Н. Методические рекомендации по принципам регулирования промысла и методам оценки параметров рыбных популяций. М., ОНТИ ВНИРО, 1980, 51 с.

Ермаков Ю.К. Некоторые данные о биологии тихоокеанского хека. В кн.: Исследования по биологии рыб и промысловой океанологии, Владивосток, ТИНРО, вып.2, 1970, с.23-33.

Засосов А.В. Теоретические основы рыболовства.М.,Пищевая промышленность, 1970, 291 с.

Засосов А.В. Динамика численности промысловых рыб. М., Пищевая промышленность, 1976, 312 с.

Комаров Ю.А. Южноафриканская ставрида (Trachurus tr. capensis (L.)). Автореферат диссертации на соиск.уч.степ.канд. биолог.наук, Калиниградский университет, 1969, 18 с.

Локшина И.Е. Динамика промысла и оценка вылова.М., Пищевая промышленность, 1978, 68 с.

Мина М.В. Рост рыб. -В кн.:Итоги науки и техники. Зоология позвоночных, 1973, т.4, с.68-115.

Мина М.В., Клевезаль Г.А. Рост животных.М.,Наука, 1976, 290 с.

Рикер В.Е. Биостатический метод А.Н.Державина. Рыбное хозяйство, 1970, №№ 10 и 11, с.6-9, 5-7.

Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. М., Пищевая промышленность, 1979, 408 с.

Р и к е р У.Е. Количественные показатели и модели роста рыб. В кн.: Биоэнергетика и рост рыб. М., Легкая и пищевая промышленность, 1983, с.346-402.

Соколовский А.С. К методике определения естественной смертности у рыб. Тр.ТИНРО, 1973, вып.4, с.142-148.

Третьяк В.Л. Методические рекомендации по оценке коэффициентов естественной и промысловой смертности рыб в различном промысловом возрасте (на примере аркто-норвежской трески). Мурманск, ПИНРО, 1983, 76 с.

Тюрин П.В. "Нормальные"кривые переживания и темпов естественной смертности рыб как теоретическая основа регулирования рыболовства. Изв.ГосНИОРХ, т.71, 1972, с.71-128.

A l l e n K.R. A method of fitting growth curves of the von Bertalanffy type to observed data. J.Fish.Res.Bd. Canada 1966 a, 23 (2), pp.163-179.

A n o n. Report of the working group on methods of fish assessment. ICES CM 1983, 17, 73pp

A n t h o n y V. The calculation of $F_{0.1}$: a plea for standartization.NAFO SCR Doc. 1980, 82/VI/64, 16p.

B a b a y a n V.K., B u l g a k o v a T.I. Estimation de l'état du stock et de la capture admissible de chinchard du Cap (Trachurus trachurus capensis C.) dans les divisions I.3 et I.4 à partir de l'analyse de la composition en tailles des captures. Colln.scient.Pap.int.Commn.SE Atl. Fish.1983a 10(1), pp.37-47.

B a b a y a n V.K., B u l g a k o v a T.I. Estimation of natural mortality and growth parameters for Cape horse mackerel (Trachurus tr. capensis C.) in divisions I.3 and I.4. Colln.scient.Pap.Int.Comm. SE Atl. 1983b, 10(1), pp.49-53.

B a b a y a n V.K., B u l g a k o v a T.I. Comparision of biostatistical methods for stock assessment and catch projections for Cape horse mackerel in divisions I.3-I.4. Colln.scient.Pap.int.Comm.SE Atl.Fish., 1984,11(1), pp.5-13.

B o r o d i n R.G. A further study of the stock condition of Antarctic sei whales.Int.Whale Commn. 1975,SC/27/36, pp.1-5.

B o r o d i n R.G. Estimation of initial population and catchability coefficient of male sperm whales in the Southern hemisphere. Int.Whale Comm. 1977a, SC/22 368 p.

B o r o d i n R.G. Methods of assessment of net recruitment and time of possible recovery of whale stocks to the MSY level. Int.Whale Commn. I977b, /27, pp.I22-I23.

B r a a t e n O. Robustness of the DeLury population. J.Fish.Res.Bd.Canada. I969, 26 (2), pp.339-355.

B u t t e r w o r t h D.S., A n d r e w P.A. Dynamic catch-effort model for the hake stocks in ICSEAF Division I.3-2.2. Colln.Pap.Int.Commn.SE Atl.Fish. I984, II(I),29-58.

C a r d o s o J.C. Notes on terminology used in fishery assessment.ICNAF Summ.Doc. I973, 73/5, Append.5,28-32.

C h a p m a n D.G. Analysis of I969-70 catch and effort for Antarctic baleen whale stocks.Int.Whale Commn.I97I SC/I8, pp.67-75.

C h a p m a n D.G. Estimation of population size and sustainable yield of sei whales in the Antarctic. Int.Whale Commn., I974, 24, pp.82-90.

Clyden A.D. Simulation of changes in abundance of the cod (Gadus morhua L.) and the distribution of fishing in the North Atlantic.U.K.Min.Agric.Fish.Food.Fish.Investig. I972, (Ser.2), 27, pp.I-58.

D e L u r y D. On the estimation of biological populations. Biometrics I947, v.3(4), pp.I25-I47.

G l a s s N.R. A technique for fitting nonlinear models to biological data. Ecology I967, 48(6),pp.IOIO-IOI3.

G u l l a n d J.A. Estimation of mortality rates. Annex to Report Arctic Fishery Working Group, ICES, C.M. I965, 3, 9 p.

G u l l a n d J.A. Manual of methods for fish assessment. Part.1. Fish population analysis.FAO,Man,Fish.Sci.I969, 4, I54 p.

I n t e r n a t i o n a l Whaling Statistics,IWC,I960-I979.

J o n e s R. The assessment of the long-term effects of changes in year selectivity and fishing effort.Mar.Res., I96I, 2, I9p.

J o n e s R. Assessing the long-term effects of changes in fishing effort and mesh size from length composition data. ICES CM I974, 33, p.6.

K u t t y K.M. Some modifications in the Beverton and Holt model for estimating the yield of exploited fish population. J.Fish.Res.Bd.Canada. I968,v.25, No 6,pp.I24I-I254.

L e s l i e P.H. Some further notes on the use of matrics in population mathematics. Biometrika I948,35,p.2I3-245.

R o b s o n D.S. Estimation of the relative fishing power of individual ships.Res.Bull.ICNAF,I966,No3,pp.5-I4.

S h e r b i t c h L.V., F l o r i n s k a y a E.S., M o r g u l e t s P.N. Age and length composition,stock size and rational fishing policy for Cape horse mackerel in I984.Colln.sci.Pap.Int.Commn.SE Atlant.Fish., I984,II(II) pp.45-54.

T i l m a n M. Estimates of population size for the North Pacific sei whale.IWC, SC/SP,I977, 74,Doc.29.Cambridge, pp.98-I06.

T o m l i n s o n P.R., A b r a m s o n N.J. Fitting L. von Bertalanffy growth curve by least squares including tables of polynominals.Fish.Bull. I96I, II6,pp.3-69.

T o m l i n s o n P.R. A generalization of the Murphy catch equation. J.Fish.Res.Bd.Canada. I970, 27, pp.82I-825.

СОДЕРЖАНИЕ

В.К.Бабаян, Т.И.Булгакова, Р.Г.Бородин, Ю.Н.Ефимов

Методические рекомендации

Применение мате[illegible]ских методов
и моделей для оценки запасов рыб

Редактор Е.А.Каменская

Отдел научно-технической информации ВНИРО

Л-64069 Подп. к печ. I5/I I985г. Формат 60х84 I/I6 Заказ 60
Объем 9,75 п.л. Цена I руб. 50 коп. Тираж I00

Ротапринт ВНИРО
I07I40. Москва, Верхняя Красносельская,I7