

УДК 639.2.053.7+573.22.087.1.001.57

Приложение модели открытой эксплуатируемой популяции к оценке локальных запасов

А. А. Михеев

Сахалинский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии (СахНИРО,
г. Южно-Сахалинск)

e-mail: alex _ mikheyev@sakhniro.ru

Показано, что регрессионные методы не позволяют оценивать открытый локальный запас, как в случае классических моделей Лесли и Де Лури. Для решения указанной проблемы предложен метод на основе фильтра Калмана. Также дано описание ряда методических недостатков модели Де Лури, делающих её менее предпочтительной в сравнении с моделью Лесли.

В данной работе представлена обобщённая модель Лесли с фильтром Калмана (ОМЛ ФК), предназначенная для реконструкции динамики запаса в период промысла по временным рядам уловов на ограниченных участках при наличии миграционных потоков и неучтённого вылова.

Ключевые слова: запасы, промысел, метод полигонов, обобщённая модель Лесли, фильтр Калмана.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка моделей истощения для оценки локальных запасов гидробионтов достаточно актуальна. Особенно это касается моделей истощения для открытых неизолированных запасов [Михеев и др., 2012]. В данной связи были разработаны две такие аналитические модели: для пространственно неоднородной и пространственно однородной неизолированной популяции [Михеев, наст. сб.]. Первая из указанных моделей даёт возможность проведения имитационных вычислительных экспериментов с целью исследования пространственных эффектов в поведении эксплуатируемого запаса. Однако в качестве диагностической она может быть применима лишь при условии наличия информации о пространственном распределении уловов и промысловых усилий. В противном случае требуется использовать пространственно однородную вер-

сию. К сожалению, пока что действительное положение дел по рассматриваемому вопросу складывается в пользу последнего варианта.

При конструировании модели для пространственно однородной открытой популяции приходится столкнуться с двумя проблемами [Михеев и др., 2012]. Первая проблема заключается в некоторой неадекватности формулировки Де Лури, делающей её менее предпочтительной по сравнению с формулировкой Лесли. Вторая проблема состоит в том, что регрессионные методы, используемые в классических моделях истощения, не позволяют оценивать открытый локальный запас. Решением этих проблем являются отказ от модели в форме Де Лури и привлечение фильтра Калмана соответственно [Михеев и др. 2012].

Фильтр Калмана (ФК) предназначен для восстановления, сглаживания и прогнозиро-

вания многомерных временных рядов характеристик некоторой динамической системы, скрытых от прямого наблюдения, по временным рядам её наблюдаемых характеристик [Kalman, 1960; Kalman, Вусу, 1961]. При этом ФК позволяет оценить как погрешность измерений, так и интенсивность шума в системных процессах. ФК широко применяется в рыбохозяйственных исследованиях [Schnute, 1991, 1994; Sullivan, 1992; Pella, 1993; Kimura et al., 1996; Reed, Simons, 1996; Peterman et al., 2003; Gudmundsson, 2004; Gudmundsson, Gunnlaugsson, 2012; Михеев, 2004, 2006; Михеев и др. 2012].

В данной работе представлена обобщённая модель Лесли с фильтром Калмана (ОМЛ ФК). Данная модель служит для оценки динамики локальных запасов в период промысла на основе временных рядов уловов при наличии миграционных потоков и неучтённого вылова. Для рассматриваемой модели разработана компьютерная программа, существенно облегчающая ее приложение к оценке запасов [Михеев, Михеев, 2007]. В течение ряда лет ОМЛ ФК применяется как основа метода полигонов при подготовке прогнозов для многих промысловых видов рыб и беспозвоночных в Сахалино-Курильском регионе.

Основное внимание в этом исследовании было уделено математическим свойствам оценок ФК. При этом одной из главных решаемых задач являлся анализ теоремы Калмана применительно к рассматриваемой модели, по некоторым причинам он был опущен в предыдущей публикации на ту же тему [Михеев и др., 2012].

МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА

В качестве материала для исследования была использована ОМЛ ФК. В данной статье рассматриваются только локальные запасы, т.е. такие запасы, которые располагаются и облавливаются в пределах ограниченного участка — полигона.

Методика исследования построена на анализе свойств оценок фильтра Калмана применительно к рассматриваемой модели. Для полноты изложения показана связь ОМЛ ФК с классическим прототипом модели для замкнутой популяции [Засосов, 1976] с одной стороны и с аналитической моделью для

открытой пространственно однородной популяцией [Михеев, наст. сб.] с другой. В приложении дано доказательство теоремы Калмана относительно эффективности оценок фильтра для ОМЛ ФК и показан вывод основных уравнений фильтра.

Методические аспекты анализа свойств фильтра как для моделей пространства состояний в самом общем виде, так и примеры приложений ФК к разнообразным задачам подробно изложены в литературе [Балакришнан, 1988; Harvey, 1989; Welch, Bishop, 2001]. Основу применяемого в теории ФК математического аппарата составляют матричные вычисления [Современная математика..., 1959] и анализ многомерных стохастических временных рядов [Справочник..., 1990].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ. В оригинальной модели Лесли предполагалось, что изменение запаса происходит только под влиянием промысла, что выражается следующим балансовым уравнением [Leslie, Davis, 1939]¹:

$$N_{t+1} = N_t - C_t + \varepsilon_t; t = 1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

где N_t — локальный запас в пределах полигона в момент времени t , величина непосредственно не наблюдаемая; C_t — известный улов на тот же момент времени; ε_t — динамический шум; случайная величина, нормально распределенная с нулевым средним и неизвестной дисперсией σ_N^2 ; T — продолжительность промысла.

Если принять известный улов на единицу промыслового усилия y_t за индекс запаса, то уравнение наблюдения для модели Лесли можно записать следующим образом:

$$y_t = qN_t, \quad (2)$$

где q — доля запаса, изымаемая единицей промыслового усилия, известна как коэффициент улавливаемости; по сути, это величина, масштабирующая шкалу измерений. Уравнение (2) предполагает, что измерение производится точно, без погрешностей.

Отсюда следует уравнение регрессии для оценки параметров модели Лесли:

$$y_t = y_1 - qK_t + \omega_t, \quad (3)$$

¹ Все приведённые в данном разделе уравнения верны для запаса, представленного как в единицах численности, так и в биомассе.

где $y_1 = qN_1$ — индекс начального запаса, являющийся константой модели; N_1 — запас на начало лова; K_t — накопленный к моменту времени t вылов; ω_t — случайная величина, нормально распределённая с нулевым средним и некоторой неизвестной дисперсией $q^2\sigma_N^2$.

Рассмотрим и другую классическую модель истощения — модель Де Лури [De Lury, 1947]. Названная модель имеет нелинейное балансовое уравнение [Михеев, наст. сб.]. Первоначально для оценки его параметров был предложен алгоритм, использующий линеаризацию логарифмированием с последующим применением метода наименьших квадратов (МНК) [Braaten, 1969]:

$$\ln y_t = \ln y_1 - qF_t + \varepsilon_t, \quad (4)$$

где F_t — известное накопленное количество промысловых усилий; остальные обозначения прежние.

При линеаризации индекс начального запаса y_1 , являющийся константой модели, масштабируется равномерно с данными y_t . Как следствие, его оценка получается примерно такой же, что и в модели Лесли, где никаких преобразований не требуется (ср. уравнения (3) и (4)). Вместе с тем, величины q и F_t в уравнении (4) не логарифмируются. В результате поле точек в координатах (y_t, F_t) сплющивается и наклон регрессии для модели Де Лури уменьшается, что означает уменьшение коэффициента q . Отсюда вытекает, что оценка N_1 , получаемая делением y_1 на q , в модели Де Лури получается систематически выше, чем в модели Лесли. Таким образом, верной можно признать в общем случае только одну из двух рассматриваемых моделей. Следует сказать, что применяемый в модели ОМЛ ФК оптимизационный алгоритм обходится без каких-либо преобразований данных, и обусловленная этими преобразованиями систематическая ошибка не возникает [Михеев, Михеев, 2007].

Вместе с тем у модели Де Лури есть существенный недостаток, который делает её применение нецелесообразным. Он состоит в том, что фактором истощения запаса в указанной модели является накопленное промысловое усилие. На самом деле затраченные усилия — особенно при промысле пассивными орудиями лова (как, например, ловушки) — не обя-

зательно сопровождаются реальным уловом. С другой стороны, модель Лесли более реалистично описывает процесс истощения запаса — за счёт прямого изъятия (см. формулу (1)). В этой связи последняя модель видится более адекватной и более предпочтительной для использования.

Недостатки моделей истощения замкнутых популяций в случае их применения к популяциям открытым достаточно очевидны. При сочетании разнонаправленных миграций через границу района уловы на усилие могут варьироваться в широких пределах, порождая размытое поле точек, а при наличии стабильной иммиграции они могут устойчиво возрастать. Как следствие, оценка q , определяемая по наклону тренда, будет либо близкой к нулю с очень большой ошибкой, либо отрицательной соответственно. В зависимости от этого запас определяется или как завышенный с большой ошибкой, или не определяется в принципе. Однако даже при выраженной тенденции уловов на усилие к падению в процессе лова оценка q не может вызывать доверия, если достоверно неизвестно, что запас изолированный. Так при наличии эмиграции или неучтённого вылова коэффициент улавливаемости будет завышаться, а в случае иммиграции — наоборот, занижаться. Как следствие, оценка запаса будет смещена в ту или иную сторону. Результирующий эффект от совместного влияния эмиграции, иммиграции и неучтённого вылова на динамику уловов в рамках моделей истощения замкнутых популяций вообще невозможно угадать.

Естественным обобщением модели Лесли на случай открытой популяции могло бы стать добавление в уравнение (1) ещё одного слагаемого:

$$N_{t+1} = N_t - C_t + m_t + \varepsilon_t, \quad (5)$$

где m_t — часть запаса, обусловленная влиянием всех неучтённых факторов, включая мигрантов и нелегальный вылов. Положительные значения величины m_t указывают на преобладание иммиграции, т.к. увеличивают запас, тогда как отрицательные соответствуют превалированию эмиграции и неучтённого вылова, который можно рассматривать как своего рода дополнительную эмиграцию.

Уравнение связи для обобщённой модели Лесли, аналогичное уравнению (3) для классической модели, будет иметь вид уже не простой, а множественной регрессии:

$$y_t = y_1 - qK_t + qM_t + \omega_t, \quad (6)$$

где M_t — результирующее неучтённое изменение запаса, накопленное к моменту времени t . Заметим, что данное уравнение может быть выведено из аналитической модели истощения для пространственно неоднородной неизолированной популяции. При этом $M_t = m_0 t$ [Михеев, наст. сб.].

Следует отметить, что практическое использование уравнения множественной регрессии (6) для оценки запасов проблематично, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, поскольку накопленный вылов — как учитываемый, так и неучтённый — со временем не убывает, то при постоянном направлении миграционного потока величины K_t и M_t будут взаимно коррелировать. В этом случае возникает эффект мультиколлинеарности [Демиденко, 1981]. Графически сказанное иллюстрирует рис. 1.

Эффект мультиколлинеарности в рассматриваемом случае состоит в том, что если

в плоскости (K_t, M_t) точки данных лежат близко к прямой линии, т.е. между K_t и M_t есть корреляция, то плоскость регрессии ведёт себя как качели (см. рис. 1). Любой аутлайер (выброс, аномальная точка данных) способен изменить её наклон. В результате оценки регрессионных коэффициентов становятся неустойчивыми.

Во-вторых, оценка параметра q становится неоднозначной, поскольку наклон плоскости регрессии по осям практически никогда не будет одинаковым (см. уравнение (6) и рис. 1). Если же вынести указанный параметр за скобки в уравнении (6), то тогда невозможно будет разделить вклады вылова и неучтённых факторов в наблюдаемое изменение запаса.

Разрешить обозначенную выше проблему можно, добавив к уравнению (5) ещё одно — для скрытых от наблюдения приращений запаса, связанных с неучтёнными факторами:

$$m_{t+1} = am_t + \delta_t, \quad (7)$$

где a — константа перехода марковского процесса для переменной m_t ; δ_t — шум в динамике неучтённого обилия; случайная величина, нормально распределённая с нулевым средним и некоторой неизвестной дисперсией σ_m^2 .

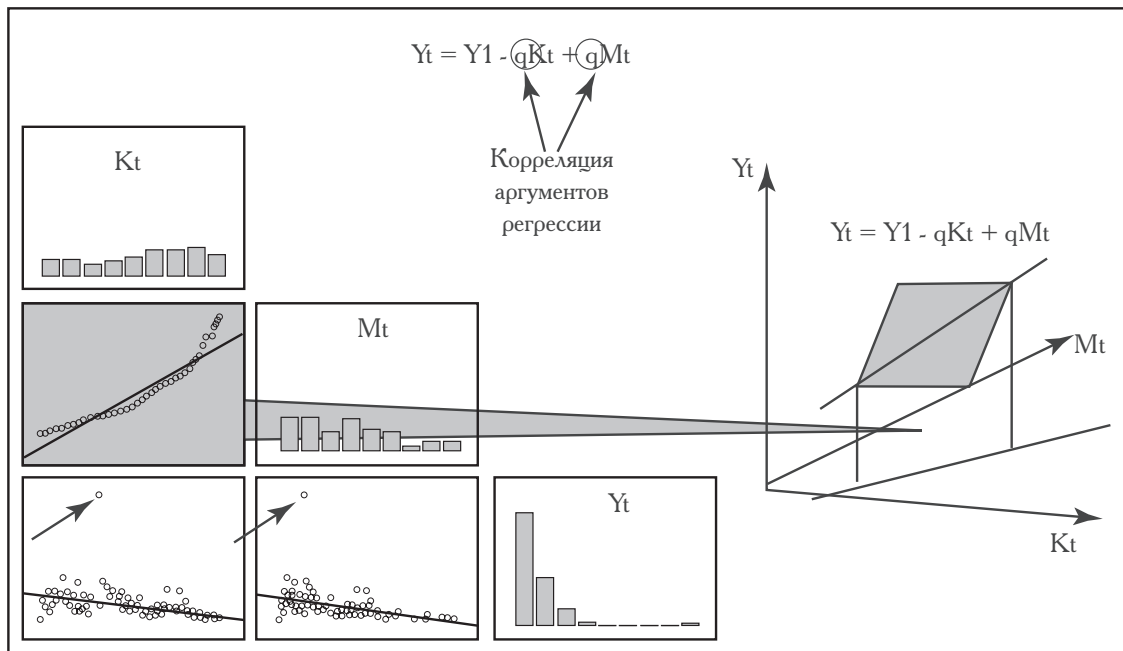


Рис. 1. Корреляционная диаграмма регрессии (5) для данных промысла равношипного краба (*Lithodes aequispina*) о. Шиащкотан (Южные Курилы) в период 27.09–08.12.2004 (278 станций); стрелками указаны аутлайеры (пояснения в тексте)

Другим обобщением модели Лесли может быть учёт ошибок, присутствующих в измерениях индекса запаса y_t . Уравнение (2) в данном случае приобретает вид:

$$y_t = qN_t + w_t, \quad (8)$$

где w_t — погрешность измерений; случайная величина, нормально распределённая с нулевым средним и некоторой неизвестной дисперсией σ_y^2 .

Уравнения (5) и (7) могут быть сведены к двум матричным²:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t + \mathbf{Q}\mathbf{v}_t; \quad (9)$$

$$y_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + R\eta_t; \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} N_t \\ m_t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} -C_t \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} q & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_N^2 & 0 \\ 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix};$$

$$R = \sigma_y^2; \quad \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \eta_t' \\ \eta_t \end{pmatrix},$$

где \mathbf{x}_t — переменная состояний; \mathbf{F} — переходная матрица процессов; \mathbf{u}_t — вектор управлений; \mathbf{H} — матрица измерений; \mathbf{Q} — матрица шума процессов; R — погрешность измерений, скалярная величина, которую для общности можно рассматривать как матрицу размерности 1×1 ; $\eta_t, \eta_t', \eta_t''$ — случайные величины, нормально распределённые с нулевым средним и единичной дисперсией.

Уравнения (9) и (10) представляют собой обобщённую модель Лесли в форме пространства состояний, являющейся традиционной при применении фильтра Калмана [Harvey, 1989; Welch, Bishop, 2001].

Как правило, ФК обрабатывает непрерывные и регулярные ряды данных, т.е. ряды, в которых каждому моменту времени соответствует одно значение измеряемой величины. Однако часто особенностью данных по уловам является их нерегулярность в указанном выше

смысле: промежутки времени между следующими друг за другом уловами не равны между собой. Например, сказанное относится к данным, собираемым при проведении мониторинга промысловых беспозвоночных. Это обусловлено тем, что при ловушечном промысле необходимо давать ловушкам время на застой, а постановка и выборка порядков обычно ведётся с перерывом только на переход между ними. Кроме того, определённое время требуется на сдачу улова. Наконец, в этот и так крайне нерегулярный процесс вмешиваются случайные факторы, например, погода. С другой стороны данные об уловах принято заносить в журналы и электронные базы в виде непрерывного ряда по станциям. Для подобных данных перед использованием в ФК рекомендуется выполнить регуляризацию, то есть расположить моменты наблюдений на равномерной оси времени [Harvey, 1989].

При регуляризации с любой заданной дискретностью, в одни моменты времени ряды будут содержать пропуски, а в другие — повторы наблюдений. Например, если шаг по времени составляет сутки, то в рядах данных возникают многодневные периоды с отсутствием лова, а в некоторые сутки ловушечные порядки могут подниматься неоднократно. В разработанной для ОМЛ ФК компьютерной программе входной поток данных автоматически регуляризуется с интервалом в одни сутки с помощью специального алгоритма вычисления весовых матриц \mathbf{W} и \mathbf{W}' . В этих матрицах число строк соответствует продолжительности промысла в сутках T , а число столбцов равно количеству выполненных станций n . Элементы $W_{t,i}$ и $W'_{t,i}$, $t = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, n$ указанных матриц вычисляются по следующему принципу. Если в заданные сутки с номером t_1 уловов не было, то все элементы $W_{t_1,i}$ и $W'_{t_1,i}$ в t_1 -й строке равны нулю. Если же в заданные сутки уловов было несколько, например, на станциях с номерами i_1, i_2, \dots, i_k , то элементы $W_{t_1,i_1}, W_{t_1,i_2}, \dots, W_{t_1,i_k}$ будут равны $\frac{1}{k}$ каждый, элементы $W'_{t_1,i_1}, W'_{t_1,i_2}, \dots, W'_{t_1,i_k}$ будут равны 1 каждый, а все остальные элементы $W_{t_1,i}$ и $W'_{t_1,i}$ в t_1 -й строке будут нулевыми. Если исходные данные из

² Жирные строчные буквы обозначают вектор-столбцы, а жирные прописные — матрицы.

журнала или электронной базы по уловам на ловушку представить как ряд y_i , а по суммарным уловам на станции как ряд C_i , то соответствующие регуляризированные временные ряды будут вычисляться по формулам, следующим далее:

$$y_t = \sum_{i=1}^n W_{it}' y_i'$$

$$C_t = \sum_{i=1}^n W_{it}' C_i'$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

или в матричной форме:

$$y = Wy, \quad C = WC.$$

В результате регуляризации временные ряды уловов на ловушку и на порядок будут содержать нулевые значения в те сутки, когда порядки не выбирались, а в те сутки, когда

было взято несколько порядков, они будут равны среднему арифметическому и сумме значений исходных рядов соответственно.

Алгоритм ФК носит рекурсивный характер и может быть представлен схематически так, как показано на рис. 2.

На вход фильтра (тёмные широкие стрелки) подаются априорные (в последующем оптимизируемые) значения константных матриц F, H, Q и R , вектор управлений u , с известными компонентами, а также начальные данные для переменной состояния x_0 и матрицы ковариации ошибки оценивания P_0 (см. рис. 2). По входным данным в блоке «предиктор» даётся прогноз переменной состояния и соответствующей матрицы ковариации, помеченных значком «+». На каждом шаге рекурсии t на вход фильтра поступает новое наблюдение y_t . Затем в блоке «корректор» определяются текущие оценки переменной состояния и матрицы ковариации как обновление предсказанных величин по вновь поступившему измерению.

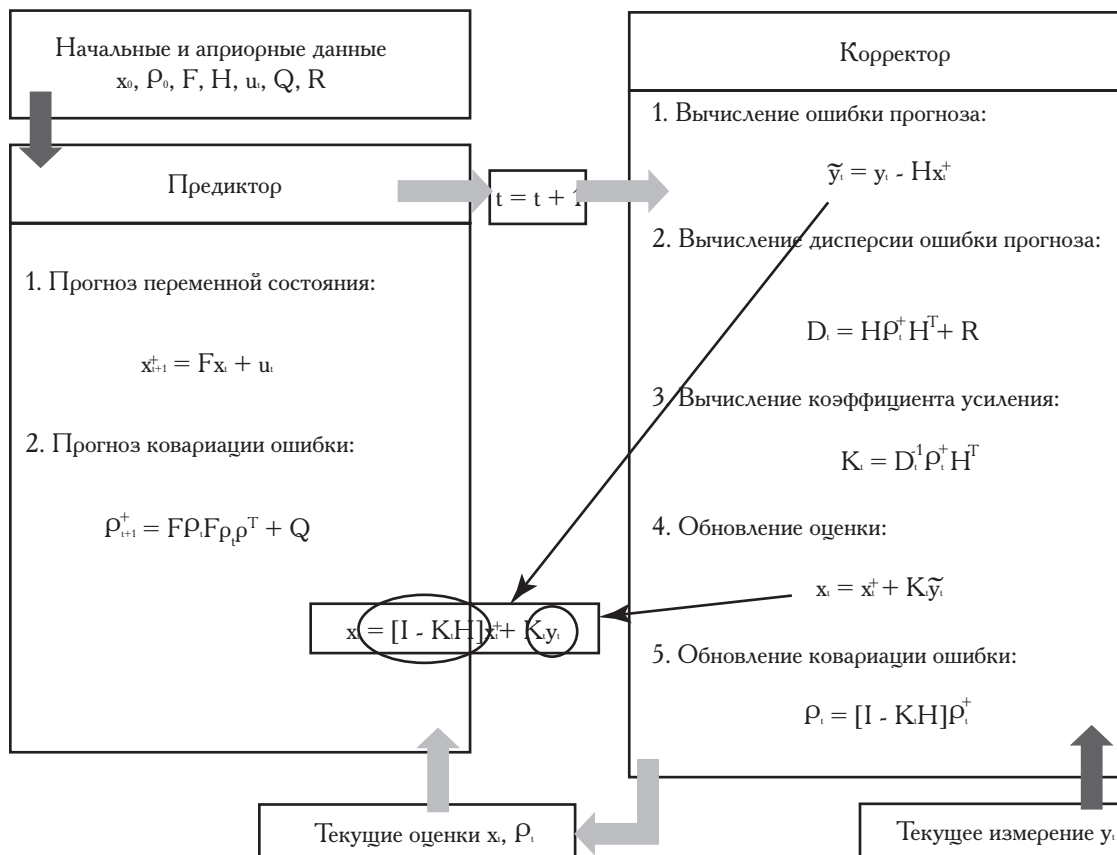


Рис. 2. Алгоритм типа «предиктор-корректор» для дискретного линейного ФК; по [Welch, Bishop, 2001] с небольшими изменениями (пояснения в тексте)

Скорректированные оценки возвращаются в блок «предиктор», и по ним строится прогноз на следующий шаг рекурсивного процесса (светлые широкие стрелки).

Из уравнений фильтра следует (тёмные узкие стрелки), что скорректированная оценка является линейной комбинацией прогноза и наблюдения, с коэффициентом усиления в качестве статистического веса (см. рис. 2). Легко заметить, что уменьшение коэффициента усиления влечёт за собой приближение обновленной оценки к прогнозному значению, а увеличение данного коэффициента придаёт больший вес фактическим измерениям. Иначе говоря, скорректированные оценки индекса запаса всегда расположены между прогнозом и фактом, а их положение на указанном отрезке полностью определено требованием статистической эффективности. При этом чем ближе оценка к факту, тем, очевидно, меньше погрешность измерений по сравнению с шумом процессов. Способность ФК находить в общей неопределённости оценки вклад каждого из источников — системных процессов и измерений — позволяет эффективно в указанном выше смысле фильтровать «полезный» сигнал из входной информации.

Отметим, что в случае гауссовских шумов линейная оценка ФК является оптимальной в среднеквадратичном среди всех возможных оценок, а в негауссовском случае ФК даёт линейную эффективную оценку [Справочник..., 1990]. Требование статистической эффективности заключается в несмещённости и состоятельности оценки. По определению несмещённая оценка с ростом выборки стремится к своему математическому ожиданию, а у состоятельной оценки дисперсия минимальна. Вывод коэффициента усиления Калмана K_t , удовлетворяющего требованиям эффективности, составляет суть теоремы Калмана [Kalman, 1960]. Её доказательство применительно к ОМЛ ФК изложено далее (см. Приложение).

Важнейшим этапом работы ФК является подгонка результатов моделирования к фактическим данным с помощью варьирования параметров, которые можно представить в виде компонент следующего вектора:

$$\theta = (a, q, \sigma_N, \sigma_m, \sigma_y, N_0, m_0)^T, \quad (11)$$

где T — знак транспонирования.

О согласованности между моделью и данными $y = (y_1, y_2, \dots, y_{T_n})^T$ можно судить по «концентрированному» логарифмическому правдоподобию [Harvey, 1989; Peterman et al., 2003], пропорциональному вероятности совместной реализации всех имеющихся наблюдений при фиксированных параметрах θ :

$$\begin{aligned} L(\theta | y) &= \\ &= \ln \left\{ \left[\prod_{t=1}^T D_t(\theta) \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{y}_t^2(\theta)}{D_t(\theta)} \right] \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln [D_t(\theta)] + \frac{\tilde{y}_t^2(\theta)}{D_t(\theta)} \right\}, \end{aligned}$$

где величины $\tilde{y}_t(\theta)$ и $D_t(\theta)$ определены на рис. 2.

Искомые оценки параметров соответствуют максимальной вероятности всего ряда наблюдений и являются решением оптимизационной задачи, известной как метод максимального правдоподобия [Демиденко, 1981]:

$$L(\theta^* | y) = \max_{\theta} L(\theta | y).$$

Для решения поставленной задачи на практике удобнее использовать другую целевую функцию, дающую тот же результат:

$$l(\theta | y) = -2L(\theta | y).$$

В этом случае исходная оптимизационная задача будет эквивалентна следующей:

$$l(\theta^* | y) = \min_{\theta} l(\theta | y). \quad (11)$$

Таким образом, применение ФК включает в себя нахождение оптимальной в смысле функционала $L(\theta | y)$ оценки параметров θ , фильтрацию входного сигнала, состоящего из измерений y_t , и построение рядов системных переменных N_t и m_t согласно алгоритму, показанному на рис. 2.

Поскольку состояния системы в ОМЛ ФК не наблюдаемы, структуру оценки для данной модели на практике удобно рассматривать относительно измерений. В этом случае формула для скорректированной оценки \hat{y}_t имеет вид (см. Приложение):

$$\hat{y}_t = w_t y_t^+ + (1 - w_t) y_t, \quad (13)$$

где y_t^+ — прогноз индекса запаса; y_t — фактический улов на усилие; w_t — статистический вес. Последний может быть выражен через отношение (см. Приложение):

$$w_t = \frac{\sigma_y^2}{D_t}. \quad (14)$$

В формуле (13) D_t — это дисперсия обновляющего процесса (см. рис. 2). Для модели ОМЛ ФК указанная величина может быть представлена выражением (см. Приложение):

$$D_t = q^2 \left(\sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt-1} + \sigma_N^2 \right) + \sigma_y^2, \quad (15)$$

где $\rho_{i,kt}$ — элементы матрицы ковариации ошибки \mathbf{P}_t , $i, k = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T$ (см. рис. 2). Из формул (13) — (15) видно, что параметры σ_N, σ_y определяют влияние прогноза (модели) и измерения (факта) на скорректированную оценку запаса.

Из приведённых выше формул видно, что стремление D_t к константе обеспечивает постоянство весов w_t и, как следствие, стабильность оценок фильтра. Отсюда вытекает, что для устойчивого фильтра достаточно, чтобы элементы суммы, стоящей в скобках формулы (15), также стремились к постоянному значению.

Согласно формулам (14) и (15) веса удовлетворяют условию: $0 < w_t < 1$. Таким образом, скорректированная оценка индекса запаса всегда заключена в интервале между прогнозом и фактом, а её положение на этом интервале полностью определено величиной w_t . Указанная величина прямо зависит от коэффициента усиления Калмана (см. Приложение). Легко заметить, что если σ_y намного меньше D_t , то и w_t — малая величина, и тогда скорректированная оценка стремится к фактическим данным. В противном случае, если значение σ_y близко к D_t , то вес w_t приближается к единице, а скорректированная оценка индекса запаса — к его прогнозу. Необходимым условием для этого является малая величина отношения $q\sigma_N/\sigma_y$ (см. формулу (15)). Таким образом, рассматривая структуру оценки доступного для измерения индекса запаса, а не скрытого от наблюдателя запаса, можно получить много полезной инфор-

мации о совместном влиянии модели и данных на эту оценку. В частности, предложенная выше интерпретация коэффициента усиления и весов рассматриваемой оценки допускает вывод, касающийся адекватности модели.

В завершение представим некоторые результаты практического приложения модели ОМЛ ФК к оценке запасов. Примером послужит её применение к двадцати пяти локальным запасам беспозвоночных Сахалино-Курильского региона [Михеев и др., 2012]. На рис. 3 представлены диаграммы, на которых сравниваются оценки указанных запасов, полученные с применением ОМЛ ФК и классической модели Лесли.

Отсутствие столбиков для полигонов № 2.1, 2.2 (синий краб, Восточный Сахалин), 5 (равношипый краб, о. Ушишир), 18, 20, 21 (четырёхугольный волосатый краб, Западный Сахалин, Южные Курилы) указывает на то, что в уловах не было выраженного тренда к истощению и при использовании классической модели какие-либо оценки получить было невозможно (см. рис. 3).

Относительно небольшие различия между моделями наблюдались на десяти полигонах из девятнадцати, для которых классическая модель вообще давала какую-то оценку. Отметим ещё два момента относительно представленных диаграмм. Во-первых, по всем полигонам доверительные интервалы оценок запаса в классической модели Лесли значительно шире, чем у ОМЛ ФК. Это обусловлено тем, что существенная часть неопределённости в указанных оценках приходится на ошибки измерения, которые в обобщенной модели принимаются во внимание, а в классической — нет. Во-вторых, в ряде случаев оценки заметно смещены (см. рис. 3). Указанное расхождение связано с тем, что классическая модель не во всех случаях может достоверно определить наклон тренда в динамике уловов или ту его часть, которая связана с коэффициентом улавливаемости. Такая ситуация возникает, когда вариабельность запаса в ходе лова достаточно высока, а тренд в уловах понижается незначительно (например, полигон № 17, четырёхугольный волосатый краб, зал. Анива). Пример другой ситуации: когда на наклон тренда оказывает влияние неучитываемая миграция.

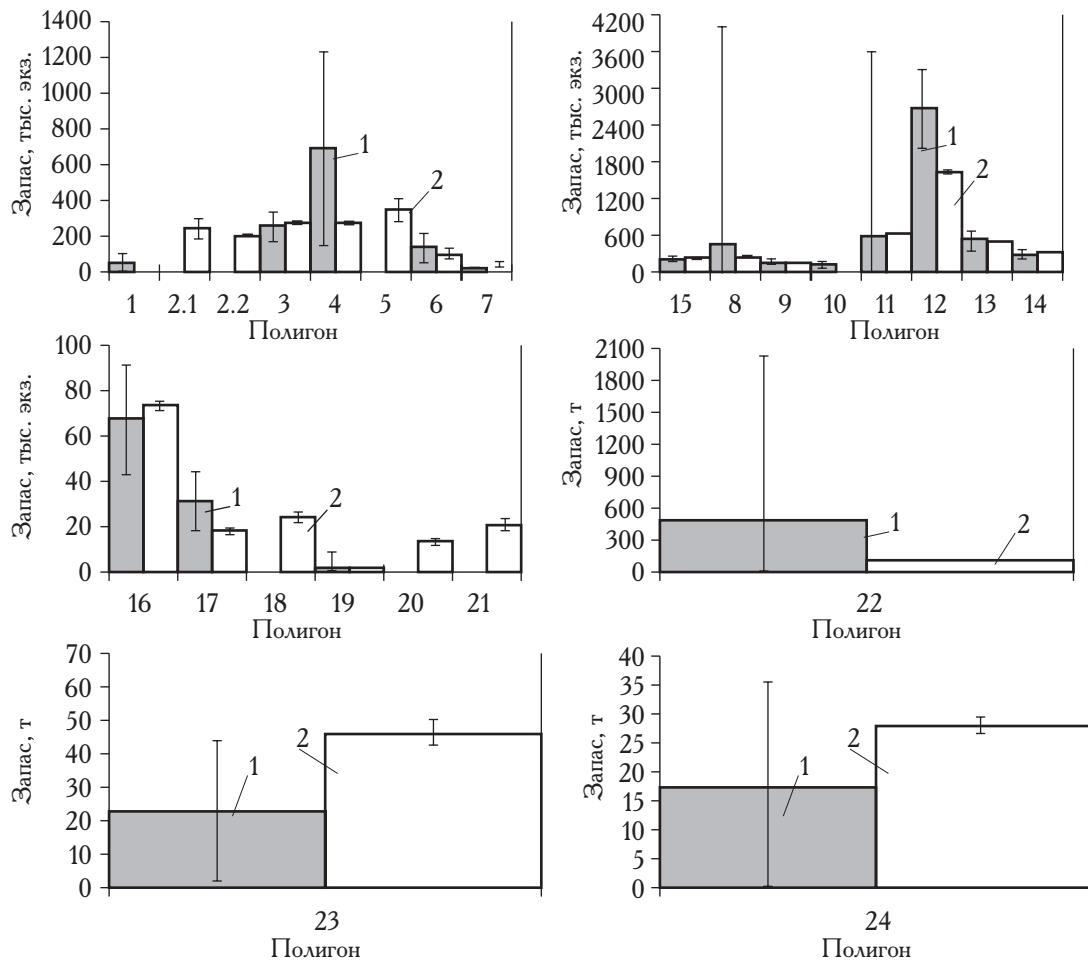


Рис. 3. Диаграммы оценок запаса классической модели Лесли и ОМЛ ФК, по [Михеев и др., 2012] (по оси абсцисс размещены номера полигонов; показаны 95%-е доверительные интервалы оценок; пояснения в тексте)

Сделанный вывод подкрепляется и результатами сравнения для полигонов № 22 и 23 (гребенчатая креветка, Татарский пролив). Для полигона № 22 в классической модели не были учтены многочисленные иммигранты, что привело к снижению коэффициента улавливаемости более чем в два раза. Для полигона № 23 классическая модель, наоборот, зависила рассматриваемый коэффициент на порядок. Виной тому стала «пилообразная» динамика запаса, формирующаяся в процессе локальных разнонаправленных миграций. В целом, поля точек в классической модели для обоих рассматриваемых полигонов были настолько размыты, что оценки наклона линии регрессии и, следовательно, коэффициента улавливаемости оказались недостоверными. Ошибки среднего для указанного коэффициента в этом случае составили $4,18 \times 10^{-7}$ и $9,83 \times 10^{-7}$ со-

ответственно по полигонам, и были того же порядка, что и сами средние [Михеев и др., 2012, табл. 3.1]. Для полигона № 24 (трубачи, Юго-восточный Сахалин) при применении классической модели Лесли начальный запас составил 17,5 т против 28,3 т, полученных с применением ОМЛ ФК [Михеев и др., 2012, табл. 3.1]. Поскольку миграции и неучтённый вылов для этого вида гидробионтов практически отсутствуют, то результаты классической и обобщённой моделей должны были бы совпадать. Однако из-за слабо выраженного тренда в уловах оценка коэффициента улавливаемости в классической модели была недостоверна: $4,2 \times 10^{-5} \pm 1,52 \times 10^{-5}$, что и обусловило смещение оценки запаса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В данной статье показана практическая реализация общей аналитической модели истощения, описывающей дина-

мику промыслового изъятия из пространственно неоднородной неизолированной популяции. Главная цель такой реализации — построение диагностической модели, позволяющей получать оценки запасов по данным о производительности промысла. Воплощением указанной реализации стала ОМЛ ФК — модель для оценки динамики запаса в процессе лова с применением фильтра Калмана.

Полученные результаты показали, что приложение модели ОМЛ ФК к анализу временных рядов уловов на усилие позволяет корректно оценивать локальные запасы гидробионтов, как в случае немигрирующих, так и активно мигрирующих популяций [Михеев и др., 2012, табл. 3.1]. Многие запасы с помощью названной модели были оценены впервые. Полученные в ОМЛ ФК оценки коэффициентов уловистости могут быть использованы при расчётах запасов в процессе подготовки сырьевых прогнозов.

В противоположность классической модели Лесли модель ОМЛ ФК способна выделить из общего баланса запаса результирующий вклад неучтённых факторов, таких, как миграционные потоки и нелегальное изъятие. ОМЛ ФК также вычленяет погрешность измерений из общей неопределённости, что способствует существенному сокращению доверительных интервалов оценок запаса по сравнению с классическим прототипом модели. Кроме того, названная модель даёт оценку не только начального запаса, как это делает классическая модель Лесли, но и позволяет рассматривать его в динамике в процессе лова. Наконец, следует отметить возможность сравнить степень влияния модели и поступающих в неё данных на оценку запаса.

Актуальность метода полигонов очевидна в связи с потребностью в экспресс-методах оценки запасов [Глубоковский, 2013]. Такой метод может оказаться чрезвычайно полезным в условиях низкой численности эксплуатируемых популяций [Михеев и др., 2007]. Кроме того, концепция метода полигонов полностью соответствует принципу истощения запаса, поскольку промысел обычно базируется на наиболее плотных скоплениях и ведётся достаточно длительное время на относительно небольшой площади. Почти идеальным объек-

том для применения метода полигонов являются многие виды беспозвоночных, обладающих, как правило, выраженным пятнистым распределением. Многие из них создают локальные скопления на сравнительно небольших участках дна и практически не мигрируют.

Таким образом, ОМЛ ФК обладает рядом качеств, создающих основу для широкого применения метода полигонов и позволяющих решать одну из важных рыбохозяйственных задач, связанную с оценкой запаса.

ЛИТЕРАТУРА

- Балакришнан А. В. 1988. Теория фильтрации Калмана. М.: Мир. 168 с.
- Вентцель Е. С. 1969. Теория вероятностей. М.: Наука, гл. ред. физ.—мат. лит.-ры. 576 с.
- Глубоковский М. К. 2013. Задачи и перспективы рыбохозяйственной науки // Рыбное хозяйство. № 2. С. 13–15.
- Демиденко Е. З. 1981. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика. 302 с.
- Засосов А. В. 1976. Динамика численности промысловых рыб. М.: Пищевая промышленность. 312 с.
- Михеев А. А. 2004. Применение фильтра Калмана к модели Рикера «запас — пополнение» // Сборник тезисов семинара «Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях биоресурсов Мирового океана». Владивосток: Изд-во ТИНРО-Центра. С. 29–32.
- Михеев А. А. 2006. Применение обобщённого фильтра Калмана к прогнозированию возвратов горбуши // Изв. ТИНРО. Т. 145. С. 146–167.
- Михеев А. А., Михеев Ф. А. 2007. Новая версия компьютерной программы для обобщённой модели Лесли с фильтром Калмана // Сборник тезисов семинара «Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях биоресурсов Мирового океана». Владивосток: Изд-во ТИНРО-Центра. С. 17–18.
- Михеев А. А., Букин С. Д., Переева Е. Р., Крутченко А. А., Смирнов И. П. 2007. К проблеме учёта промысловых беспозвоночных в популяциях с низким уровнем численности // Сборник научных трудов «Морские промысловые беспозвоночные и водоросли: биология и промысел. К 70-летию со дня рождения Бориса Георгиевича Иванова». М.: Изд-во ВНИРО. Т. 147. С. 27–38.
- Михеев А. А., Букин С. Д., Переева Е. Р., Живогладова Л. А., Крутченко А. А., Смирнов И. П. 2012. Оценка запасов беспозвоночных в Сахалино-Курильском районе на основе анализа временных

рядов уловов с применением фильтра Калмана // Изв. ТИНРО. Т. 168. С. 99–120.

Михеев А.А. 2014. Решение балансовых уравнений для модели промыслового истощения неизолированной популяции // Труды ВНИРО. Т. 151. С. ?–?.

Современная математика для инженеров. 1959 / Ред. Э.Ф. Беккенбах. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 500 с.

Справочник по прикладной статистике. 1990 / Ред. Э. Ллойд, У. Ледерман. М.: Финансы и статистика. Т. 2. 527 с.

Braaten D. O. 1969. Robustness of DeLury Population Estimator // J. Fish. Res. Board Can. V. 26. P. 339–355.

DeLury D. 1947. On the Estimation of Biological Populations // Biometrics. V. 3. P. 145–167.

Gudmundsson G. 2004. Time Series Analysis of Abundance Indices of Young Fish // ICES J. Mar. Sci. V. 61. P. 176–183.

Gudmundsson G., Gunnlaugsson T. 2012. Selection and Estimation of Sequential Catch-at-Age Models // Can. J. Fish. Aquat. Sci. V. 69. P. 1760–1772.

Harvey A. 1989. Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter // New York: Cambridge Univ. Press. 554 p.

Kalman R. E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Eng. V. 82. P. 34–45.

Kalman R. E., Bucy R. S. 1961. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // J. Basic Eng. V. 83. P. 95–108.

Leslie P. H., Davis D. H. S. 1939. An Attempt to Determine the Absolute Number of Rats on a Given Area // J. Anim. Ecol. V. 8. P. 94–113.

Kimura D. K., Balsiger J. W., Ito D. H. 1996. Kalman Filtering the Delay-Difference Equation: Practical Approaches and Simulations // Fish. Bull. V. 94. P. 678–691.

Pella J. J. 1993. Utility of Structural Time Series Models and the Kalman Filter for Predicting Consequences of Fishery Actions // Proc. Int. Symp. on Management Strategies for Exploited Fish Populations / Eds. G. Kruse, D. M. Eggers, R. J. Marasco, C. Pautzke, T. J. Quinn II. Alaska Sea Grant College Program Report № AK-SG-93–02: University of Alaska Fairbanks, Alaska. P. 571–594.

Peterman R. M., Pypser B. J., MacGregor B. W. 2003. Use of the Kalman Filter to Reconstruct Historical Trends in Productivity of Bristol Bay Sockeye Salmon (*Oncorhynchus nerka*) // Can. J. Fish. Aquat. Sci. V. 60. P. 809–824.

Reed W. J., Simons C. M. 1996. Analyzing Catch-Effort Data by Means of the Kalman Filter // Can. J. Fish. Aquat. Sci. V. 53. P. 2157–2166.

Schnute J. T. 1991. The Importance of Noise in Fish Population Models // Fish. Res. V. 11. P. 197–223.

Schnute J. T. 1994. A General Framework for Developing Sequential Fisheries Models // Can. J. Fish. Aquat. Sci. V. 51. P. 1676–1688.

Sullivan P. J. 1992. A Kalman Filter Approach to Catch-at-Length Analysis // Biometrics. V. 48. P. 237–257.

Welch G., Bishop G. 2001. An Introduction to the Kalman Filter. ACM, Inc. 47 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Вывод формул для коэффициента усиления Калмана, дисперсии процесса обновления и статистических весов оценки фильтра применительно к модели ОМЛ ФК.

Первоначально докажем, что оценка индекса запаса для ОМЛ ФК является линейной комбинацией с коэффициентами, служащими статистическими весами, связанными, в свою очередь, с коэффициентом усиления Калмана. Иначе говоря, покажем, что из уравнений фильтра, показанных на рис. 2, следуют формулы (13) — (15). Используемые при этом матрицы приведены выше (см. обозначения к уравнениям (9) и (10)).

Предварительно построим ряд вспомогательных матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{P}_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11t} & \rho_{12t} \\ \rho_{21t} & \rho_{22t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11t} + \rho_{21t} & \rho_{12t} + \rho_{22t} \\ a\rho_{21t} & a\rho_{22t} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T &= \begin{pmatrix} \rho_{11t} + \rho_{21t} & \rho_{12t} + \rho_{22t} \\ a\rho_{21t} & a\rho_{22t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} & a(\rho_{12t} + \rho_{22t}) \\ a(\rho_{21t} + \rho_{22t}) & a^2\rho_{22t} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{P}_{t+1}^+ &= \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} & a(\rho_{12t} + \rho_{22t}) \\ a(\rho_{21t} + \rho_{22t}) & a^2\rho_{22t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_N^2 & 0 \\ 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} + \sigma_N^2 & a(\rho_{12t} + \rho_{22t}) \\ a(\rho_{21t} + \rho_{22t}) & a^2\rho_{22t} + \sigma_m^2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{t+1}^+ \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} + \sigma_N^2 & a(\rho_{12t} + \rho_{22t}) \\ a(\rho_{21t} + \rho_{22t}) & a^2 \rho_{22t} + \sigma_m^2 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} + \sigma_N^2 \\ a(\rho_{21t} + \rho_{22t}) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H} \mathbf{P}_{t+1}^+ \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} q & 0 \end{pmatrix} q \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} + \sigma_N^2 \\ a(\rho_{21t} + \rho_{22t}) \end{pmatrix} = \\ = q^2 \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt} + \sigma_N^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует формула (15) для дисперсии обновляющего процесса:

$$D_t = \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R = \\ = q^2 \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt-1} + \sigma_N^2 \end{pmatrix} + \sigma_y^2$$

и формула для коэффициента усиления Калмана:

$$\mathbf{K}_t = D_t^{-1} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T = \\ = \frac{q}{D_t} \begin{pmatrix} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt-1} + \sigma_N^2 \\ a(\rho_{21t-1} + \rho_{22t-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{Nt} \\ K_{mt} \end{pmatrix},$$

где K_{Nt} и K_{mt} — элементы коэффициента Калмана, соответствующие системным переменным N_t и m_t . Для дальнейшего вывода требуется только первый из них:

$$K_{Nt} = \frac{q}{D_t} \sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt-1} + \sigma_N^2 = \\ = \frac{D_t - \sigma_y^2}{q D_t} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{\sigma_y^2}{D_t} \right). \quad (\text{П 1.1})$$

Если взять первую компоненту обновлённой оценки вектора состояний \mathbf{x}_t (см. рис. 2), то получим, что скорректированная оценка запаса связана с прогнозом и обновляющим процессом формулой: $N_t = N_t^+ + K_{Nt} \tilde{y}_t$. Учти-

тая, что обновление есть, по сути, ошибка прогноза $\tilde{y}_t = y_t - y_t^+$, получим выражение для скорректированной оценки индекса запаса:

$$\hat{y}_t = q N_t = q \left[N_t^+ + K_{Nt} (y_t - y_t^+) \right] = \\ = y_t^+ - q K_{Nt} y_t^+ + q K_{Nt} y_t = \\ = (1 - q K_{Nt}) y_t^+ + q K_{Nt} y_t.$$

Теперь, используя формулу (П 1.1), можно ввести статистический вес, прямо зависящий от коэффициента усиления Калмана (см. формулу (14)):

$$w_t = (1 - q K_{Nt}) = \frac{\sigma_y^2}{D_t} = \\ = \frac{\sigma_y^2}{q^2 \left(\sum_{i,k=1,2} \rho_{i,kt-1} + \sigma_N^2 \right) + \sigma_y^2}, \quad 0 < w_t < 1.$$

Таким образом, скорректированная оценка индекса запаса удовлетворяет формуле (12):

$\hat{y}_t = w_t y_t^+ + (1 - w_t) y_t$. Тем самым, завершён вывод формул (13) — (15).

2. Доказательство теоремы Калмана применительно к модели ОМЛ ФК. Пусть динамическая система в пространстве состояний представлена уравнениями (9) и (10):

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t + \mathbf{Q} \mathbf{v}_t,$$

$$y_t = \mathbf{H} \mathbf{x}_t + R \eta_t,$$

где все обозначения приведены выше.

Пусть также $\mathbf{E}\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания, $\tilde{\mathbf{x}}_t^+$ — ошибка прогноза \mathbf{x}_t^+ , и для рассматриваемой динамической системы выполняются условия $\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_t^+\} = \mathbf{0}$ и отсутствия сериальной и кросс-корреляции шумов системы (8), (9):

$$\mathbf{E}\{\mathbf{v}_t \mathbf{v}_{t+\tau}^T\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}\{\eta_t \eta_{t+\tau}\} = 0,$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{v}_t \eta_t\} = 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ и } \forall \tau > 0.$$

Тогда оценка \mathbf{x}_t вектора состояния рассматриваемой системы является линейной взвешенной комбинацией его прогноза \mathbf{x}_t^+ и измерения y_t [Kalman, 1960; Kalman, Bucy, 1961; Балакришнан, 1988; Harvey, 1989; Welch, Bishop, 2001]:

$$\mathbf{x}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}] \mathbf{x}_t^+ + \mathbf{K}_t y_t, \quad (\text{П } 2.1)$$

где \mathbf{K}_t — коэффициент усиления Калмана, определяемый выражением:

$$\mathbf{K}_t = D_t^{-1} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T, \quad (\text{П } 2.2)$$

и где D_t — дисперсия обновляющего процесса:

$$D_t = \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R; \quad (\text{П } 2.3)$$

\mathbf{P}_t^+ — матрица ковариации ошибки прогноза:

$$\mathbf{P}_{t+1}^+ = \mathbf{F} [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}] \mathbf{P}_t^+ \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}. \quad (\text{П } 2.4)$$

При этом матрица \mathbf{K}_t , играя роль статистического веса, делает оценку вектора состояния эффективной, т.е. \mathbf{x}_t , определённая формулой (П 2.1), — это несмещённая оценка, а матрица ковариации её ошибки \mathbf{P}_t минимальна для всех $t > 0$, где:

$$\mathbf{P}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}] \mathbf{P}_t^+. \quad (\text{П } 2.5)$$

Сначала продемонстрируем несмещённость оценки фильтра в виде уравнения (П 2.1). Пусть \mathbf{x}_t^0 — истинное состояние системы, а ошибки прогноза и оценки этого состояния имеют вид $\tilde{\mathbf{x}}_t^+ = \mathbf{x}_t^+ - \mathbf{x}_t^0$ и $\tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^0$ соответственно. Рассмотрим оценку фильтра в виде $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^+ + \mathbf{K}_t \tilde{y}_t$, эквивалентном уравнению (П 2.1) (см. рис. 2), где $\tilde{y}_t = y_t - \mathbf{H} \mathbf{x}_t^+$ — ошибка измерения или обновляющий процесс. По определению

$$\mathbf{E}\{\tilde{y}_t\} = R \mathbf{E}\{\eta_t\} = 0 \text{ и } \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_t^+\} = 0.$$

Отсюда и из свойств оператора $\mathbf{E}\{\}$ [Вентцель, 1969] имеем, что

$$\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_t\} = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_t^+\} + \mathbf{K}_t \mathbf{E}\{\tilde{y}_t\} = 0.$$

Это и является требуемым доказательством несмещённости [Справочник..., 1990].

Теперь докажем состоятельность оценки фильтра (П 2.1). Поскольку по определению шумы кросс-некоррелированы, матрица ковариации ошибок имеет диагональный вид с элементами, равными дисперсиям. Пусть $\mathbf{D}\{\}$ — это оператор дисперсии. Тогда в новых обозначениях

$$\mathbf{P}_t = \text{diag} \mathbf{D}\{\mathbf{x}_t\} = \mathbf{E}\{\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T\},$$

$$\mathbf{P}_t^+ = \text{diag} \mathbf{D}\{\mathbf{x}_t^+\} \text{ и}$$

$$\mathbf{D}\{y_t\} = \mathbf{E}\{\tilde{y}_t \tilde{y}_t^T\} = R.$$

Из уравнения (П 2.1), используя свойства оператора $\mathbf{D}\{\}$ [Вентцель, 1969], получим, что:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}] \mathbf{P}_t^+ [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}]^T + \mathbf{K}_t R \mathbf{K}_t^T = \\ &= \mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ - \\ &\quad - \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T + \mathbf{K}_t R \mathbf{K}_t^T. \end{aligned}$$

Здесь и далее использованы следующие свойства транспозиции произведения матриц [Современная математика..., 1959]:

$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. Из них следует, что

$$\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T = \mathbf{P}_t^+ (\mathbf{H} \mathbf{K}_t)^T = \mathbf{H} \mathbf{K}_t \mathbf{P}_t^+ \text{ и}$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - 2 \mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t R \mathbf{K}_t^T.$$

Из условия экстремума $\partial \mathbf{P}_t / \partial \mathbf{K}_t = 0$ следует, что

$$2 \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - 2 \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ + 2 R \mathbf{K}_t^T = 0$$

или

$$[\mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R] \mathbf{K}_t^T = \mathbf{K}_t [\mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R] = \mathbf{H} \mathbf{P}_t^+$$

и окончательно

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R]^{-1}.$$

Получаем, что матрица ковариации ошибок как функция \mathbf{K}_t имеет единственный экстремум. Последний является минимумом, т.к.

$$\partial^2 \mathbf{P}_t / \partial \mathbf{K}_t^{T^2} = 2(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R)$$

и матрица $\mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R$ положительно определенная.

Поскольку дисперсия обновляющего процесса равна:

$$\begin{aligned} D_t &= D\{\tilde{y}_t\} = D\{y_t\} + \mathbf{H} \text{diag} D\{\mathbf{x}_t^+\} \mathbf{H}^T = \\ &= \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T + R \end{aligned}$$

окончательно получаем формулы (П 2.2) и (П 2.3). Таким образом, если верны две указанные формулы, то матрица ковариации ошибок минимальна для всех $t > 0$. Тем самым доказана состоятельность оценки (П 2.1).

Осталось вывести уравнения (П 2.4) и (П 2.5). Выше было показано, что верно равенство

$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - 2\mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t R \mathbf{K}_t^T$, переходящее после перегруппировки слагаемых в равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t &= \mathbf{P}_t^+ - \mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ + \\ &+ (\mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t R \mathbf{K}_t^T). \end{aligned}$$

Выше также показано, что из условия экстремума $\partial \mathbf{P}_t / \partial \mathbf{K}_t = 0$ следует, что

$$\mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ + R \mathbf{K}_t^T = 0.$$

Отсюда вытекает, что выражение, стоящее выше в скобках, равно нулю, т.к.:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ + \mathbf{K}_t R \mathbf{K}_t^T &= \\ = \mathbf{K}_t (\mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{H}^T \mathbf{K}_t^T - \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ + R \mathbf{K}_t^T) &= 0. \end{aligned}$$

В этой связи получим, что

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^+ - \mathbf{K}_t \mathbf{H}\mathbf{P}_t^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}] \mathbf{P}_t^+,$$

и формула (П 2.5) доказана.

Применив оператор $\mathbf{D}\{\}$ непосредственно к уравнению (8), сразу получим, что $\mathbf{P}_{t+1}^+ = \mathbf{F}\mathbf{P}_t^+ \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$. Отсюда после подстановки для \mathbf{P}_t выражения (П 2.5) получим формулу (П 2.4). Таким образом, формулы (П 2.1) — (П 2.5) выведены, и теорема Калмана применительно к ОМЛ ФК доказана.

Application of Model of the Open Exploited Population to Assessment of the Local Stocks

A.A. Mikheyev

Sakhalin Research Institute of Fisheries and Oceanography (Yuzhno-Sakhalinsk)

e-mail: alex _ mikheyev@sakhniro.ru

The regression methods are shown not to allow assessing an open local stock as in the case of the Leslie and De Lury classic models. To solve this problem, a method based on Kalman filter is suggested. Besides, there is given a description of some methodical weak points of De Lury model, which make it less preferable regarding to Leslie's model.

This work presents the Leslie's Generalized Model with Kalman filter (LGM KF), which is aimed to reconstruct a stock dynamics during fishery using the temporary series of catches on local areas in the presence of migratory flows and neglected catch.

Key words: stocks, fishery, polygon method, Leslie's Generalized Model, Kalman filter.